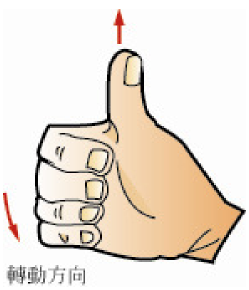
第八章

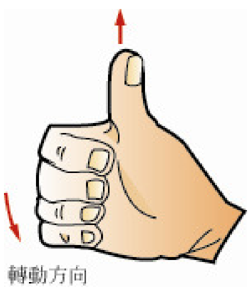
080101 物理量：

平移物理量		轉動物理量	
x	位移	角位移	θ
v	速度	角速度	ω
a	加速度	角加速度	α
p	動量	角動量	ℓ
m	質量	轉動慣量	I
F	力	力矩	τ
F＝ma	牛頓第二運動定律	轉動學的牛頓第二運動定律	$\tau = I\,\alpha$
P＝mv	動量與力	角動量與力矩	$\ell = I\,\omega$
$E=\frac{1}{2}mv^2$	動能	轉動動能	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
【備註】：角速度、角加速度、角動量、力矩皆爲向量，方向爲右手螺旋定則解題時，必須特別注意指的是大小還是方向。			

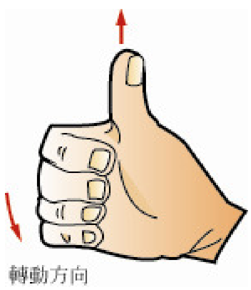
p=F·v
角速度 ω



功率
角動量



p=$\tau\cdot\omega$
力矩 τ



080102 角速度(ω)

a＝每秒增加的速度

角速度 ω	
單位時間轉過的角度　(向量)	
平均角速度	瞬時角速度
$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$　或　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

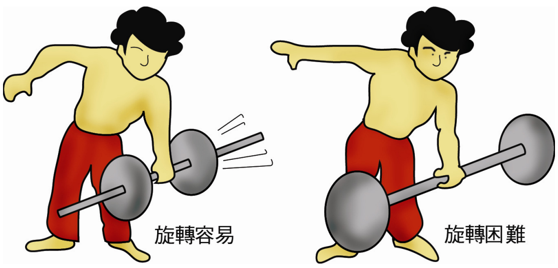
080104 轉動慣量(I)

1.意義：轉動的難易度。　(舉一反三：力學中，質量是移動的難易度)

2.定義：

(1)質點的轉動慣量：”質點相加”　$I=\sum mr^2$

(2)非質點的轉動慣量：$I=\int dm\cdot r^2$



080201 移動與轉動物理量之關係

1.位移：$x=r\theta$

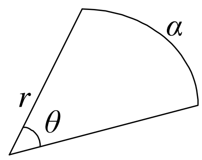
2.切線速率：$v=r\omega$

3.切線加速度：$a_T=r\alpha$

4.法線加速度：$a_N=\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}=r\omega^2$

5.加速度：$a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}$

【記法與技巧】：從扇形開始



080301 基本公式

平　移		轉　動	
p	動量	角動量	ℓ
m	質量	轉動慣量	$I=mr^2$
F	力	力矩	τ
F=ma	牛頓第二定律	牛頓第二定律	$\tau=I\cdot\alpha$
$F=\dfrac{dP}{dt}$	動量與力	角動量與力矩	$\tau=\dfrac{d\ell}{dt}$

動量：代表物體的運動量

080302 角動量

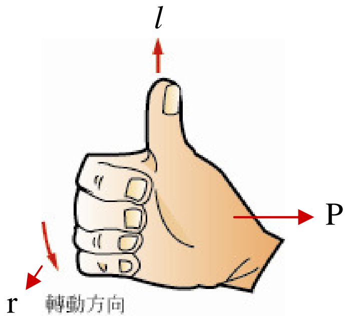
1.角動量的定義：$\ell = \cancel{rmv} = \vec{r} \times \vec{p} = r(p\sin B)$

2.方向：依右手螺旋定則 ※角動量會與 r、P 垂直

3.單位：(kg-m^2/s)

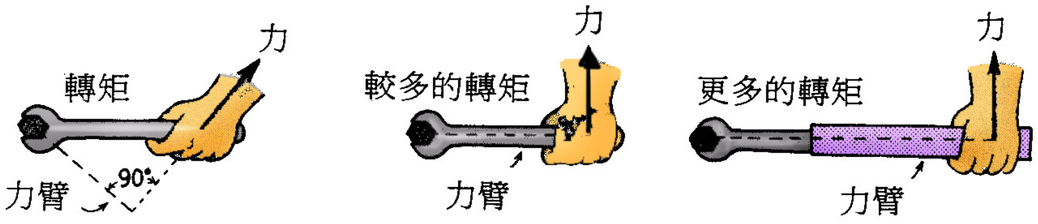
4.角動量的公式推導：

$\ell = rp = rmv = rm(r\omega) = mr^2\omega = I\omega \leftrightarrow p = mv$



080303 力矩

1.定義：



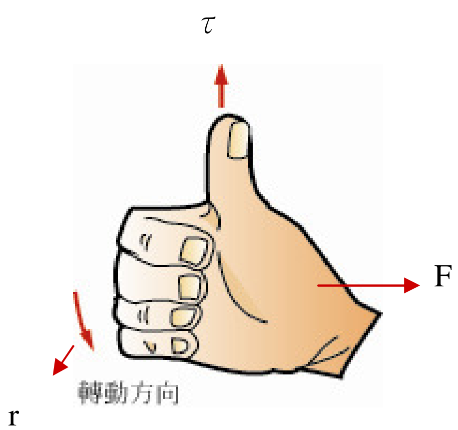
1.定義：$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

2.方向：依右手螺旋定則

3.單位： m-N

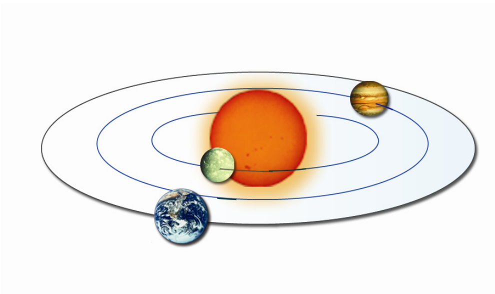
4.力矩的公式推導：

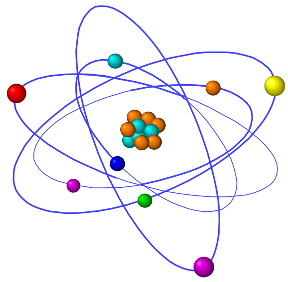
$$\begin{aligned}\tau &= rF = r(ma_T) \\ &= rm(r\alpha) \\ &= mr^2\alpha = I\alpha \leftrightarrow F = ma\end{aligned}$$



080402 角動量守恆的實例

6.太陽系與行星　　　　7.原子理論





∵萬有引力爲連心力＜力過支點＞

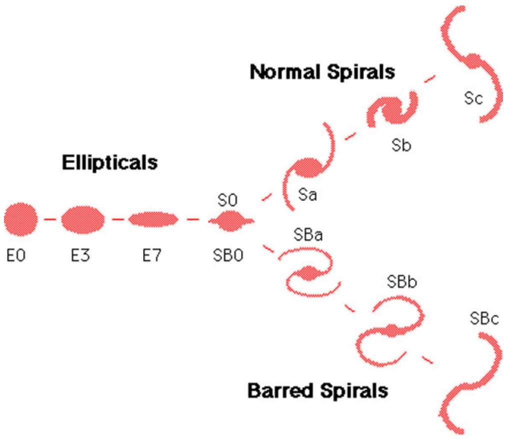
∴不會產生力臂　∴$\tau=0\rightarrow l$ 守恆

$l = \uparrow \mathrm{P} = rmv = mr^2\omega = I\omega$

$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}rv\sin\theta=\frac{1}{2}r^2\omega$（定値）$=\frac{\ell}{2m}$

克普勒行星第 2 運動定律是“角動量”守恆的必然結果

8.地球轉動　　　　9.星系的誕生



“庫侖力”爲連心力

∴$\tau=0\rightarrow\ell$ 守恆

$\ell=n\cdot\frac{h}{2\pi}$（角動量量子化）

（n，ℓ，m，s）

與“h”的單位一樣普朗克常數

普朗克常數

ℓ 守恆

∴海平面上升

　地球的 T 愈長

$\ell : m\underset{\uparrow}{r^2}\underset{\downarrow}{\omega}$

第八章 詳解

範例01：

【解答】(1) 250(轉/s^2) (1) 250(m/s^2)

【解析】

有角加速度→∴越來越快

$(1)150^2=100^2+2\alpha\cdot 25$

$\therefore \alpha=250\,{}^{轉}\!/\!_{s^2}$

$(2)150^2=100^2+2a\cdot 25$

$\therefore a=250\,{}^{m}\!/\!_{s^2}$

範例02：

【解答】$\omega_0=-100,\ \ \alpha=100$

【解析】

$$\begin{cases} S=v_{\circ}t+\dfrac{1}{2}at^2 \\ v=v_{\circ}+at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 400=\omega_0\times 4+\dfrac{1}{2}\alpha\times 4^2 \\ 200=\omega_0+3\times\alpha \end{cases}$$

$\therefore \omega_0=-100 \quad \alpha=100$

範例03：

【解答】(1) 0.3 (2) 6.7 (3) －0.5

【解析】

(1) $S=v_0+\dfrac{1}{2}at^2$

$10-(-10)=(-2)\times 20+\dfrac{1}{2}\alpha\times 20^2$

$\therefore a=0.3\ rad/s^2$

(2) 即求角速度＝0 時

$\omega=\omega_0+\alpha t$

$0=-2+0.3t$

$t=6.7秒$

(3) $\alpha=-2+0.3\cdot 5=-0.5\,{}^{rad}\!/\!_{s^2}$

範例04：

【解答】(1) 8 (2) 4 (3) 4

【解析】

$\theta=2t^2+3 \quad \omega=4t \quad \alpha=4$

(1) $\omega_2=8\,{}^{rad}\!/\!_{s}$ (2) $\alpha_2=4\,{}^{rad}\!/\!_{s^2}$

(3)

$\overline{\omega}_2 \therefore$ 求ω_1即可。$\theta_2 = 11,\ \theta_0 = 3$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2-0} = \frac{11-3}{2}$$

$$= \frac{11-3}{2} = 4 \qquad \therefore \overline{\omega}_2 = 4$$

範例05：

【解答】5

【解析】

$a_T = r\alpha = 1\times 3 = 3$ ， $a_N = r\omega^2 = 1\times 2^2 = 4$

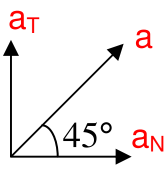
$$\therefore a = \sqrt{3^2+4^2} = 5\, {}^{rad}\!/_{s^2}$$

範例06：

【解答】1 / 2

【解析】

$$\begin{cases} a_N = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2 \\ a_T = r\alpha \end{cases}$$



此時$a_T = a_N \rightarrow r\alpha = r\omega^2 \quad \therefore \alpha = \omega^2$

$$\omega^2 = 2\alpha\theta \qquad \therefore \theta = \frac{1}{2}$$

範例07：

【解答】$\dfrac{2}{15}$

【解析】

同軸→ω相同；同線→v 相同

$\omega_{甲} = \omega_{乙}$

$v_{甲} = v_{丁} \rightarrow r_{甲}\omega_{甲} = r_{丁}\omega_{丁}$

$v_{乙} = v_{丙} \rightarrow r_{乙}\omega_{乙} = r_{丙}\omega_{丙}$

令$\omega_{甲} = \omega_{乙} = 1$

$\therefore \omega_{丙} = 2/3$， $\omega_{丁} = 5 \qquad \therefore \dfrac{\omega_{丙}}{\omega_{丁}} = \dfrac{2}{15}$

範例08：

【解答】：$2:3:6$

【解析】：

齒輪咬合表示：_線速度_相等

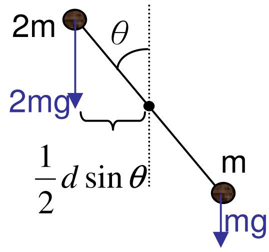
$v_A = v_B = v_C$

$r_A\omega_A = r_B\omega_B = r_C\omega_C$

$3\omega_A = 2\omega_B = \omega_C \qquad \therefore \omega_A : \omega_B : \omega_C = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1} = 2:3:6$

範例09：

【解答】$\frac{1}{2}mgd\sin\theta$



【解析】

$$2mg \cdot \frac{d}{2}\sin\theta - mg \cdot \frac{d}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}mgd\sin\theta$$

範例10：

【解答】2 : 5

【解析】

$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{P} = rmv = mr^2\omega = \mathrm{I}\omega \propto \omega$

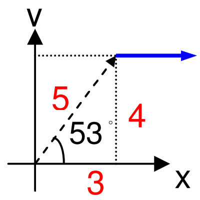
$\theta = 2t^2 + 3$ ； $\theta' = 4t = \omega_{(t)}$

$$\frac{l_{(2)}}{l_{(5)}} = \frac{\omega_{(2)}}{\omega_{(5)}} = \frac{4\times 2}{4\times 5} = \frac{2}{5}$$

範例11

【解答】40

【解析】

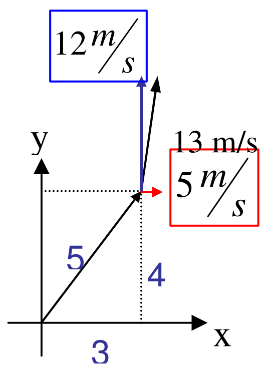


$$l = rP\sin\theta = rmv\sin\theta = 5\times 2\times 5\times\frac{4}{5} = 40m^2 \cdot {}^{kg}\!/_{s}$$

範例12：

【解答】32

【解析】



$\ell = rmv$

$\ell = 3\times 2\times 12 - 4\times 2\times 5 = 32$

$\ell = m(xv_y - yv_x)$

$= m\begin{vmatrix} x & y \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$

$l = P_y r_x - P_x r_y = \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix}$

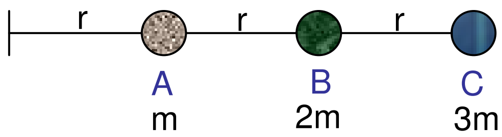
(逆時針→ + ；順時針→ —)

範例13：

【解答】$I_0 = 36mr^2$ ；$I_A = 14mr^2$ ；$I_B = 4mr^2$ ；$I_C = 6mr^2$

【解析】$I_0 = mr^2 + (2m)(2r)^2 + (3m)(3r)^2$

$I_A = (2m)r^2 + (3m)(2r)^2$



$I_B = mr^2 + 3mr^2$

$I_C = m(2r)^2 + (2m)r^2$

範例14：

【解答】15π

【解析】

$120r.p.m \to 420r.p.m$ ；

$2r.p.s \to 7r.p.s$

$2\times 2\pi\, {}^{rad}\!/_{s} \to 7\times 2\pi\, {}^{rad}\!/_{s}$

$\alpha = \dfrac{14\pi - 4\pi}{6} = \dfrac{5}{3}\pi$

$\tau = I\alpha = 9\times\dfrac{5}{3}\pi = 15\pi(m\cdot N)$

範例15：

【解答】5

【解析】

$\tau = I\alpha$

$60\times 0.6 = (\dfrac{1}{2}\times 40\times 0.6)^2\alpha \qquad \therefore \alpha = 5\ {}^{rad}\!/_{s}$

範例16：

【解答】(1) $\dfrac{2T}{MR}$ (2) $\dfrac{2T}{M}$

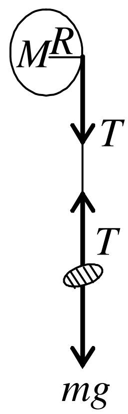
【解析】

(1) $\tau = \mathrm{I}\alpha \to T\times R = \dfrac{1}{2}MR^2\times\alpha \to \alpha = \dfrac{2T}{MR}$

(2) $a_T = R\alpha = \dfrac{2T}{M}$

範例17：

【解答】(1) $\dfrac{2m}{M+2m}g$ (2) $\dfrac{mM}{M+2m}g$ (3) $\dfrac{2mg}{(M+2m)R}$



【解析】

$$\begin{cases} mg-T=ma \\ T\times R=\dfrac{1}{2}MR^2\times\alpha \\ a=R\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2m}{M+2m}g \\ T=\dfrac{mM}{M+2m}g \\ \alpha=\dfrac{2m}{(M+2m)R}g \end{cases}$$

範例18：

【解答】$\dfrac{\mathrm{I}\omega_0}{\mathrm{I}+mr^2}$

【解析】

子彈所受向心力：$F_c=m\dfrac{v^2}{r}=m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}=mr\omega^2$

∵向心力過支點∴ τ =0 不會造成力矩

$\ell=rP=rmv=mr^2\omega=\mathrm{I}\omega$

$\mathrm{I}\omega_0=(\mathrm{I}+mr^2)\omega'$ (子彈轉動慣量爲 mr^2)

$\therefore \omega'=\dfrac{\mathrm{I}\omega_0}{\mathrm{I}+mr^2}$

範例19：

【解答】4 kg-m^2

【解析】

$8\times600=(8+\mathrm{I}_B)\times400 \quad \therefore \mathrm{I}_B=4$

範例20：

【解答】(1) 4ω (2) $2v$ (3) $\dfrac{3}{2}mR^2\omega^2$

【解析】

$l=mvr=I\omega$

(1) $mr^2\omega=m(\dfrac{r}{2})^2\omega'\Rightarrow\omega'=4\omega$

(2) $v=r\omega \quad \therefore \dfrac{1}{2}r\cdot4\omega=2r\omega=2v$

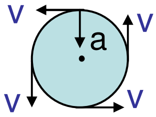
(3) $\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot4v^2-\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{3}{2}mv^2=\dfrac{3}{2}mR^2\omega^2$

範例21：

【解答】(E)

【解析】

(A) $F_c = mr\omega^2$



(D)右手定則

ℓ 必為穿出紙面(方向相同)

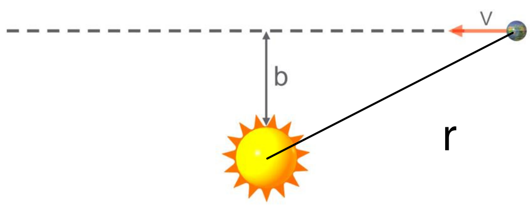
(E) 乘積恆為 0

範例22：

【解答】(A)(B)(C)(E)

【解析】

(A) 如果行星不受太陽的引力，合力矩=力×力臂，力=0，力矩當然等於 0。合力矩=0，角動量會守恆。如果受到太陽的引力，因為萬有引力不會造成力矩，所以角動量還是守恆，故對太陽角動量量值 = mvb



$\vec{\ell} = \vec{r}m\vec{v} \Rightarrow \ell = rmv\sin\theta$

$= mvb$

(B)

$$E = E_k + U_g = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 > 0$$

$$\text{(C)}\ a = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GMm}{d^2}}{m} = \frac{GM}{d^2}$$

(D)被吸過來 $\therefore U \downarrow \quad E_k \uparrow$ $\therefore$ v 變大　$\therefore$ v = min

(E)角動量守恆 $mvb = mv'd \quad \therefore v' = \frac{b}{d}v$

力學能守恆 $\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}m(\frac{b}{d}v)^2$

$$\begin{cases} mvb = mv' \cdot d \quad \therefore v' = \frac{b}{d}v \\ \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}m(\frac{b}{d}v)^2 \end{cases} \Rightarrow d = \sqrt{(\frac{GM}{v^2})^2 - b^2} - \frac{GM}{v^2}$$