

第七章

P.5



070101

功(Work)

1. 功的定義--力與位移的內積： $W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cdot \cos\theta$

(1) 若 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ， $W > 0$ ，外力對物體做正功，物體獲得能量。

(2) 若 $\theta = 90^\circ$ ， $W = 0$ ，外力對物體做不作功，物體不獲得能量
(法線力的作用是改變方向，但不改變大小)。

(3) 若 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ ， $W < 0$ ，外力對物體做負功，物體減少能量。

【基本觀念】：能量為一純量，沒有方向，但有正負，正負不代表方向，
僅代表能量的增減。

P.6

6. 能量並非萬能！

→ 能量解法無法解出：①時間 ②方向 ③系統內力或向心力等不作功之力

8. 【比較】由力導出的物理量：

※【特別注意】：F-t 圖下的面積= 衝量；F-s 圖下的面積= 功



070102

功率(Power) 功率(power)

2. 功率的推導： $Power = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{S}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

P.14

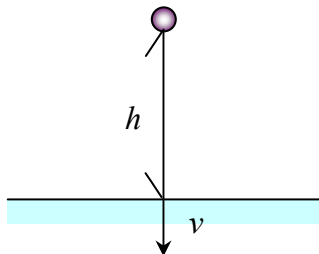
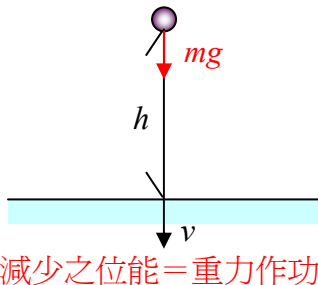
070201 

地表附近的動能與位能

種類	動能(kinetic energy) Energy of a moving body.	位能(potential energy) Potential energy is energy that can be associated with the configuration (arrangement) of a system of objects that exert forces on one another.
定義	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$U_g = mg\Delta h$
備註	1. 動能為純量，與運動方向無關，且恆為正值 2. 動能只與物體的運動速率有關，與受力、加速度無關 3. 可再細分成移動動能、轉動動能、振動動能	1. 零位面的選擇以計算方便為原則。 2. 其值與零位面的選擇有關。 3. 我們通常不關心位能的絕對值，而是關心位能的變化量。

070202 

系統與位能

圖示		
觀點	【想法一】： 減少之位能=增加的動能	【想法二】： 減少之位能+重力作功=增加的動能
結果	$mgh = \frac{1}{2}mv^2$	$mgh + \cancel{mgh} = \frac{1}{2}mv^2$

結論：

※觀念<一>：有系統才有位能，沒有系統就沒有位能

※觀念<二>：系統內力不作功，外力才會作功

* 兩個物體（一組系統）才能造成位能，位能需建立在系統的假設上。



070203

守恆力與位能

2. 位能：守恆力對物體作功，才可定義位能

(1) 重力作功 = - 重力位能

(2) 彈力作功 = - 彈力位能

(3) 電力作功 = - 電位能

* 負號 = 外力與位能反向

P.15



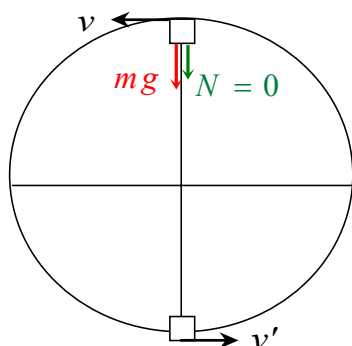
070204

動能與動量

物理量	動 能	動 量
定 義	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$\vec{P} = m\vec{v}$
性 質	純 量	向 量
意 義	描述運動時的所具有的能量	牛頓定義的「運動的量」
關係式	$E_k = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$	$P = \sqrt{2mE_k}$

P.23

【Q】：試求鉛直面圓周運動最高點的最小速率及最低點的最小速率？

增加之 E_k = 減少之 U_g

最高點： $mg + \mathcal{N} = m \frac{v^2}{R} \quad v = \sqrt{gR}$

最低點： $\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m(\sqrt{gR})^2 = mg(2R) \quad v' = \sqrt{5gR}$

* 最高點與最低點之 U 相差 $\sqrt{4gR}$

P.33

解 法	變力作功，畫圖求面積
圖示 與 解法	$W =$ $= \frac{GMm}{2R} + \frac{GMm}{R}$ $= \frac{3}{2} \frac{GMm}{R}$ $\cancel{U_{(\infty)}} - U_{(0)} = \frac{3}{2} \frac{GMm}{R}$ $\Rightarrow U_{(0)} = -\frac{3}{2} \frac{GMm}{R}$
公式	1、地心處位能 2、距地 $U_{(0)} = -\frac{3}{2} \frac{GMm}{R}$ $U_{(R/2)} = -\frac{11}{8} \frac{GMm}{R}$ $\Rightarrow U_{(R/2)} = -\frac{11}{8} \frac{GMm}{R}$

070304  地球內部的位能

Q：「將物體自距地心 r 處移到無窮遠處所作的功」=多少呢？

【進階思考題】：「重力位能」到底是 mgh 還是 $-\frac{GMm}{r}$ ？怎麼差這麼多？

$$\Delta U = U_A - U_B$$

$$= \left(-\frac{GMm}{R+h}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

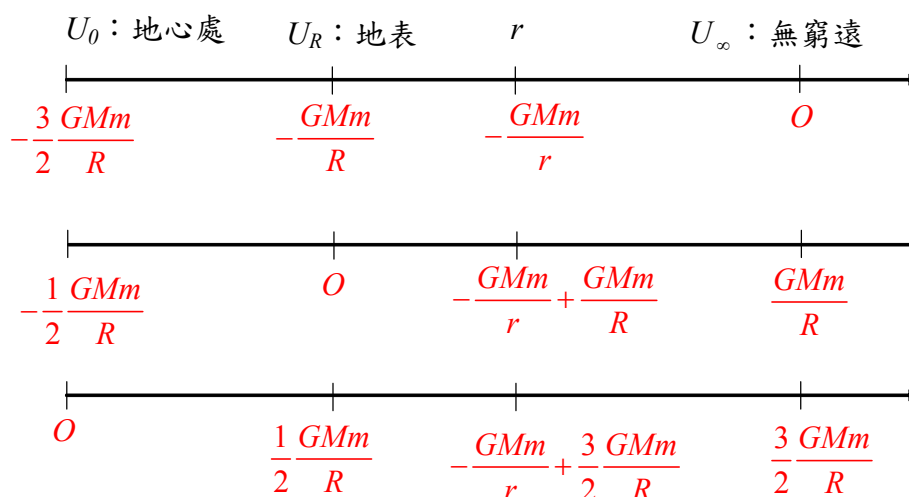
$$= \frac{GMmh}{(R+h)R}$$

$$(h \ll R = 6400\text{km})$$

$$\Rightarrow \Delta U = \underbrace{\left(\frac{GM}{R^2}\right)}_g m h = mgh \text{ (地表附近之位能)}$$

P.34

【重力位能的變換】



070306  零位面的選擇

選擇以無窮遠當零位面的目的-- 以計算方便為原則

P.37

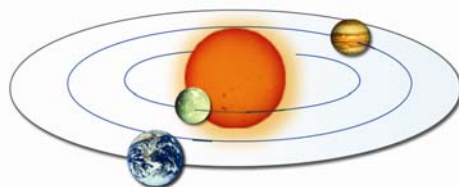
070305 行(衛)星能量

種類	公 式	係數關係
位 能	$U = -\frac{GMm}{r}$	-1
動 能	$E_k = \frac{GMm}{2r}$ 同一軌道，軌道速率相同，與質量無關	$\frac{1}{2}$
總 能	$E = U + E_k = -\frac{GMm}{2r}$	$-\frac{1}{2}$

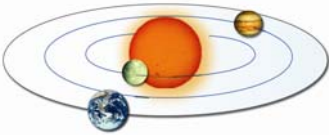
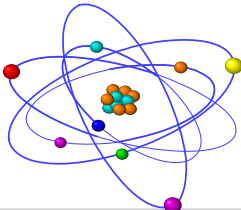
動能的推導：萬有引力提供向心力

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = \frac{2E_k}{r}$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{GMm}{2r}$$



※【比較】：

運 動	行星繞日	電子繞原子核
圖 示		
向心力來源	牛頓萬有引力提供向心力	庫倫力提供向心力
相同處	平方反比力	平方反比力
相異處	只有引力	有引力與斥力
位 能	$U = -\frac{GMm}{r}$	$U = \frac{kQq}{r} = \frac{ke(-e)}{r} = -\frac{ke^2}{r}$
動 能	$E_k = \frac{GMm}{2r}$	$E_k = \frac{ke^2}{2r}$
總 能	$E = -\frac{GMm}{2r}$	$E = -\frac{ke^2}{2r}$

P.42

070312



脫離(動)能與束縛能

物理量	脫離動能(Escape Kinetic Energy)	束縛能(Binding Energy)
意義	物體脫離重力場至無窮遠處，所須具備的最少動能	物體脫離重力場至無窮遠處，所需補充的最少能量
公式	$E_e + U = 0 \Rightarrow \text{free}$ $E_e = -U = U = \frac{GMm}{r}$ 脫離速率 $= \text{地表 } E_e = -U = \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_e^2$ $\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GMR}{R^2}} = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ km/s}$	$E_b = -E = E = \frac{GMm}{2r}$ $E_b + E = 0 \Rightarrow \text{free}$

1. 【無窮遠處的最小能量=0】

2. 軌道速率與脫離速率之關係：

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GMR}{R^2}} = \sqrt{gR} \quad v_e = \sqrt{2}v \text{ (脫離速率} = \sqrt{2} \text{ 軌道速率)}$$

※地球隨地球自轉的動能與其位能相比，可忽略；故，在地表的物體，不考慮

其動能。 $\frac{E_{k\text{地}}}{E_{k\text{人}}} = \frac{1}{400} \quad \therefore \text{地表 } E_k \text{ 約可忽略}$

* * 隕石由無窮遠處落回地球與地球上之脫離速率 = 11.2 km/s

 $\Rightarrow$ by 運動的對稱性

※ 觀念：

一、小牛欲買皮鞋一雙 1000 元，手中有現金 200 元，

【問題 1】：小牛要具備多少錢才能買該雙皮鞋？ 1000 元

【問題 2】：小牛要再補充多少錢才能買該雙皮鞋？ 800 元

二、衛星的位能為 -1000J，動能為 +500J，

【問題 1】衛星要具備多少動能才能脫離地球的引力場？ 1000J

【問題 2】衛星還要補充多少能量才能脫離地球的引力場？ 500J

進階思考：有沒有可能脫離動能與束縛能相等？何時相等？ 沒有動能時

小牛欲買皮鞋一雙 1000 元，手中有現金 0 元。

人造衛星與地表

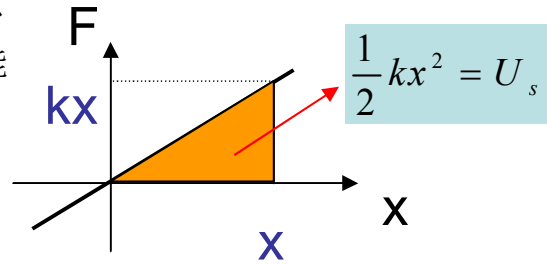
* 電子游離能=束縛能

$$\frac{T_{\text{地}}}{T_{\text{人}}} = \frac{1440}{84} = 17 \quad v \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{v_{\text{地}}}{v_{\text{人}}} = \frac{1}{20}$$

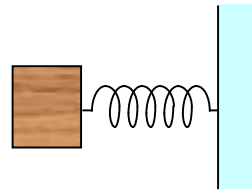
P.51

070401 彈力位能的基本觀念

- 1、外力所作的功=彈簧所儲存的位能
- 2、變力作功=畫圖求面積
- 3、彈簧的受力遵守虎克定律

070402 水平彈簧的能量變換—「動能」與「彈力位能」的相互轉換

$$E = E_k + U_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



P.61

【結論】：力學能守恆與動量守恆，兩者無關

* 當牽涉到 U_g ， E_k 以外之力時，力學能不守恆。

P.62

070503 一維彈性碰撞——何謂「一維彈性碰撞」？

【一維】：直線上的碰撞 【彈性】：力學能 守恆 【碰撞】：動量 守恆



(1) 動量守恆： $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

(2) 動能守恆： $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\Rightarrow m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2(v_2' + v_2)(v_2' - v_2)$$

→ 數學上的聯立方程組，兩個方程式解兩個未知數 v_1' 及 v_2'

碰撞後的末速公式： $\frac{②}{①} \Rightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \Rightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$

(接近速度 = 分離速度)

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

看到自己用:自己－別人；看到別人用：2 倍別人

恢復係數：分離速度與接近速度的比值： $e = \frac{\bar{v}_2' - \bar{v}_1'}{\bar{v}_1 - \bar{v}_2} = \frac{\text{分離速度}}{\text{接近速度}}$

彈性	非彈性	
	一般非彈性	完全非彈性
$e=1$	$e \neq 1$	$e=0$ (合為一體)

P.63

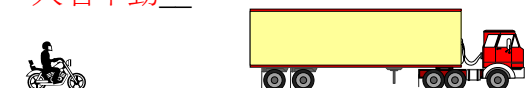
070504  重要特例一、質量相等 $\rightarrow$ 速度交換

$$v_1' = v_2$$

$$v_2' = v_1$$

二、 $v_2=0$ (1) $m_1 \ll m_2 \rightarrow$ 質量小者反彈，大者不動

$$v_1' = -v_1 \quad \Delta v_1 \text{ 最大}$$



$$v_2' \doteq 0$$

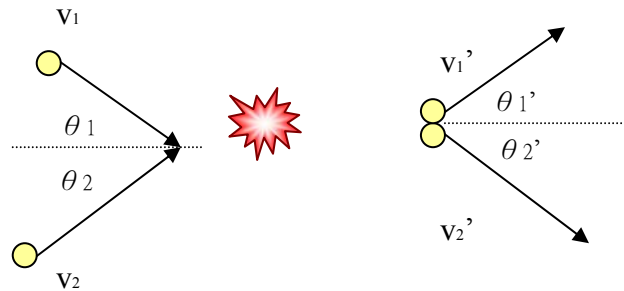
(2) $m_2 = m_1 \rightarrow$ $v_1' = 0$, $v_2' = v_1 \Rightarrow$ 定桿(3) $m_1 \gg m_2 \rightarrow$ 質量大者不改變，小者 2 倍飛出

$$v_1' = v_1 \quad \Delta v_2 \text{ 最大}$$

$$v_2' = 2v_1$$

**進階思考：**1. v_2' 恆大於 v_1' $v_1 - v_2 = v_2' - v_1' > 0 \Rightarrow$ 作為校正機制之條件2. v_2' 的上限是？ $2v_1$ **【動能轉移率與動能保存率】：**當 $m_1 = m_2$ 時，動能轉移率 = 100%

P.70

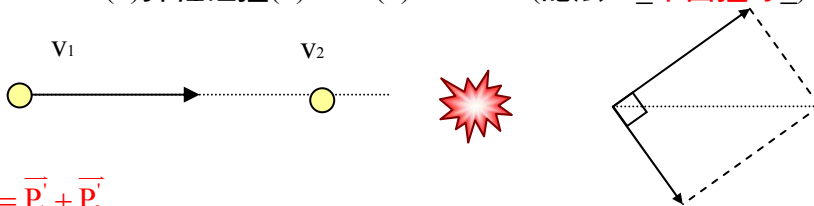
070513 **二維彈性碰撞**----何謂「二維彈性碰撞」？【二維】：平面上的碰撞 【彈性】： 力學能 守恆 【碰撞】： 動量 守恆

$$(1) \text{x 方向動量守恆} : m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 = m_1 v_1' \cos \theta_1' + m_2 v_2' \cos \theta_2'$$

$$(2) \text{y 方向動量守恆} : m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2 = m_1 v_1' \sin \theta_1' + m_2 v_2' \sin \theta_2'$$

$$(3) \text{動能守恆} : \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

→共有 3 條方程式，4 個未知數，因此無法得出末速公式。
考試時，題目會給定一條條件，以解其他三個未知數。

070514 **重要特例－重要特例：**(1)彈性碰撞(2) $v_2=0$ (3) $m_1=m_2$ ：(記法：平面撞球)

$$(1) \vec{P}_1 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$

$$(2) E_{k1} = E_{k1}' + E_{k2}' = \frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_2'^2}{2m_2} \quad (\text{畢氏定理})$$

P.74

070517 一維非彈性碰撞——何謂「一維非彈性碰撞」？

【一維】：直線上的碰撞 【非彈性】： 力學能 不守恆 【碰撞】： 動量 守恆

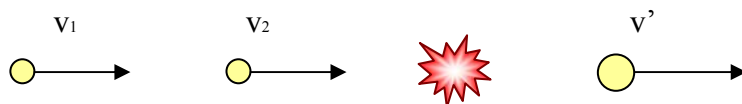


【動量守恆】： $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

→因此，非彈性碰撞，只能列「動量守恆」，無法解出 v_1' 及 v_2'

070518 一維完全非彈性碰撞——何謂「一維完全非彈性碰撞」？

→一維完全非彈性碰撞----撞完後合為一體，亦即合體的碰撞



【動量守恆】： $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$

故可解出合體末速為 $v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

→有沒有覺得這個公式很面熟呢？Oh，Yes! 就是 質心速度。

P.76

070521  完全非彈性碰撞的能量分析：典型範例：子彈(m, v)

射入靜止的木塊(M)



【問題(1)】：合體末速為何？

$$mv = (m + M)v' \Rightarrow v' = \frac{m}{m + M}v = v_c$$

【問題(2)】：合體的末動能為何？

$$E'_k = \frac{1}{2}(m + M)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}v^2 = \text{質心動能} = E_{kc}$$

【問題(3)】：既然是非彈性碰撞，力學能一定不守恆，

那麼到底損失多少力學能？它會轉換成熱能。

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}v^2 = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v^2 = \text{內動能} = E_{ki}$$

【北模】：子彈 m 射入木塊 M ，剩 10%動能，質量比 m/M 為？

減縮質量(reduced mass)

$$\text{剩下動能} = E_c = \frac{m}{m + M}E_{k1} = \frac{1}{10}E_{k1} \quad \therefore \frac{m}{M} = \frac{1}{9}$$

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v^2 = \frac{M}{m + M}E_{k1} \quad \Rightarrow E_{ki} + E_{kc} = E_{k1}$$

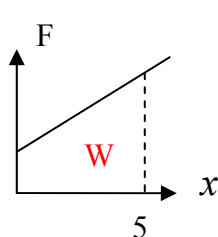
$$E_{kc} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}v^2 = \frac{m}{m + M}E_{k1} \quad \text{損失的} \quad \text{剩下的}$$

第七章 詳解

範例 01：

【解答】：(1) $10\sqrt{3}$ (2) 90

【解析】：

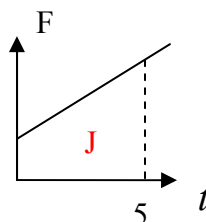
(1) $F = 1 + 2x$ 

$$W = \frac{1+11}{2} \times 5 = 30J$$

$$W = \Delta E_K \Rightarrow 30 = \frac{1}{2} \times 5 \times v^2$$

$$\therefore v = 2\sqrt{3}$$

$$J = \Delta P = m\Delta v = 10\sqrt{3}$$

(2) $F = 1 + 2t$ 

$$J = \Delta P = m\Delta v = 30 \Rightarrow \Delta v = 6$$

$$v = v_0 + 6$$

$$\therefore W = \Delta E_K = \frac{1}{2} \times 5 \times 6^2 - 0 = 90J$$

範例 02：

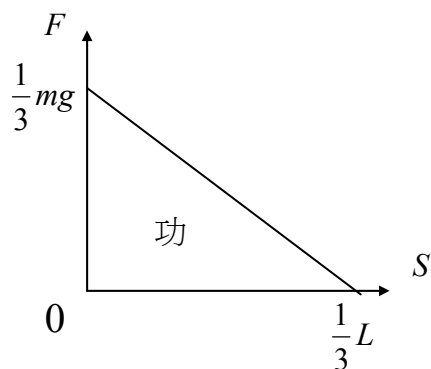
【解答】： $\frac{1}{18}mgL$

【解析】：

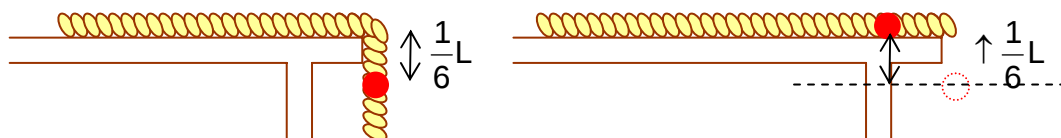
《解法一》：一開始手需施力 $\frac{1}{3}mg$ ，拉回後施力 = 0

$$1. W = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}L \times \frac{1}{3}mg = \frac{1}{18}mgL$$

$$2. W = \bar{F} \times S = \frac{F_1 + F_2}{2} \times S = \frac{\frac{1}{3}mg + 0}{2} \times \frac{1}{3}L = \frac{1}{18}mgL$$



《解法二》：能量守恆：外力作功 = 物體所增加的位能



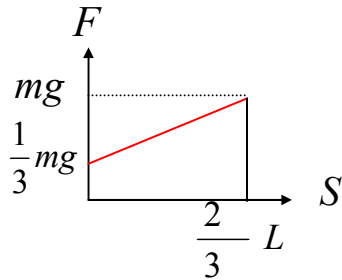
$$W = \Delta U = \left(\frac{1}{3}m\right)g \times \frac{L}{6} = \frac{1}{18}mgL$$

範例 03：

【解答】： $v = \sqrt{\frac{8}{9}gL}$

【解析】：

【解法<一>】：功的基本定義：功=力×位移 + 變力作功=畫圖求面積

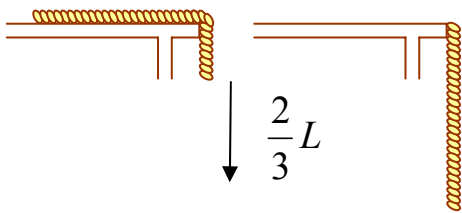


一開始有 $\frac{1}{3}$ 在外，重力有 $\frac{1}{3}mg$ ，滑出後重力有 mg

$$W = \frac{\frac{1}{3}mg + mg}{2} \times \frac{2}{3}L = \frac{4}{9}mgL$$

$$W = \Delta E_k \Rightarrow \frac{4}{9}mgL = \frac{1}{2}mv^2 \therefore v = \sqrt{\frac{8}{9}gL}$$

【解法<二>】：能量守恆：減少的重力位能=所增加的動能



$$\Delta U = \left(\frac{2}{3}m\right)g \times \frac{2}{3}L = \frac{4}{9}mgL$$

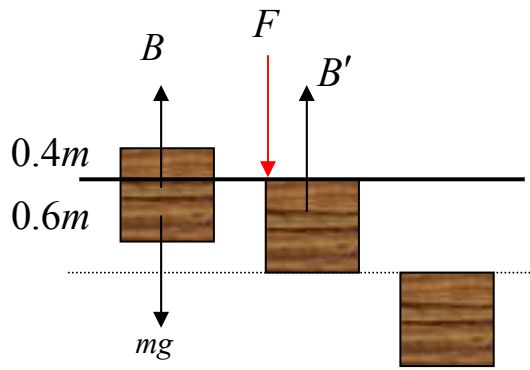
$$\Delta U = \Delta E_k \Rightarrow \frac{4}{9}mgL = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{8}{9}gL}$$

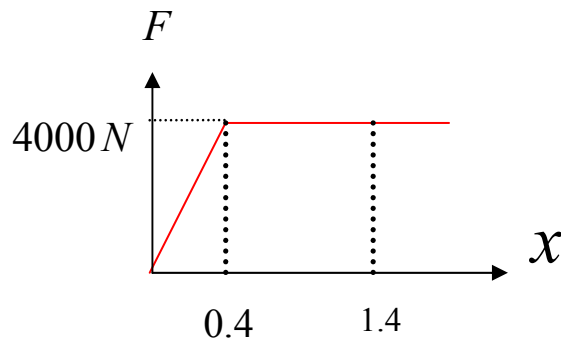
範例 04：

【解答】：(1) 800J (2) 4000J

【解析】：



$$F = \Delta B = (0.4 \times 1^2) \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 10$$



$$1 \text{ g/cm}^3 = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} \times 4000 \times 0.4 = 800 \text{ J}$$

$$(2) \quad W' = 4000 \times 1 = 4000 \text{ J}$$

外力所作的功 = 水增加的 U_g (浮力位能)

範例 05：

【解答】： $W = Fd \cos \theta = \frac{\mu_k mgd \cos \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}$

【解析】：

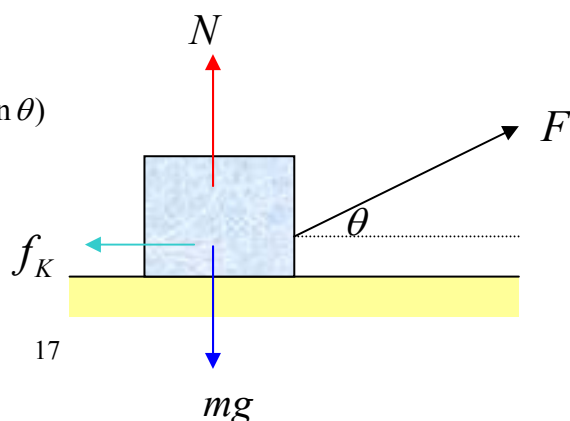
等速：1.合力 = 0

2.動能變化 = 0

$$\begin{cases} F \sin \theta + N = mg \\ F \cos \theta = f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F \sin \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu_k mg}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}$$

$$W = Fd \cos \theta = \frac{\mu_k mgd \cos \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}$$



範例 06：

【解答】：ACDFGHI

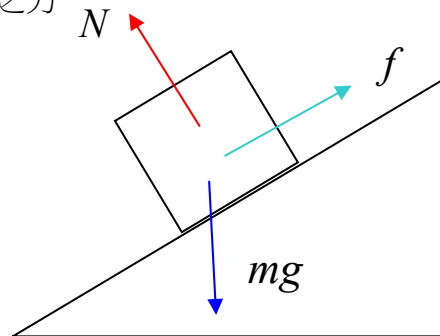
【解析】：

(A) 拋出後手對球不施力

(B) f 與 N 都是斜面施予物體之力

N 不作功

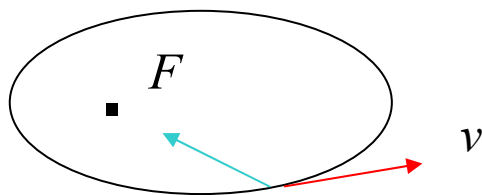
f 作負功



(C) $S = 0$

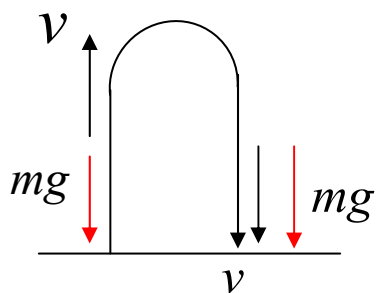
(D) $F_c \perp v, \theta = 0^\circ$

(E)

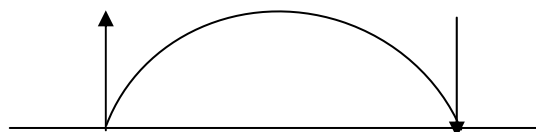


(F) $F_c \perp v, \theta = 90^\circ$

(G) $S = 0$ 正負功抵消



(H) 垂直方向位移為 0 $\rightarrow$ 重力作功 = 0



$$(I) \quad \vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v}$$

$$\therefore \theta = 90^\circ, \text{磁力不做功}$$

範例 07：

【解答】：AB

【解析】：

(A) $S = 0$

(B) $\vec{F} \perp \vec{v}, \theta = 90^\circ$

(C) $W = \Delta U_g$

(D) $W = \Delta E_k$

(E) $W = \Delta U_g$

範例 08：

【解答】：4 倍

【解析】：

$$\frac{W}{t} = \vec{F} \times \frac{\vec{S}}{t} \Rightarrow P = \vec{F} \times \vec{v}$$

$$P = F \times v = f \times v = (kv) \times v \propto v^2$$



船在水中航行受水阻力作用，當 $f = F$ 達終端速度

範例 09：

【解答】：1200N

【解析】：

$$36 \text{ km/hr} \rightarrow 10 \text{ m/s}$$

$$9 \text{ km/hr} \rightarrow 2.5 \text{ m/s}$$

$$P = F \times v = f \times v \Rightarrow 3000 = f \times 2.5$$

$$\therefore f = 1200 \text{ N}$$

範例 10：

【解答】： 10^4

【解析】：

【解法<一>】：

看一秒 $Heat = \Delta U = mgh$

$$= 10^2 \times 10 \times 10$$

$$= 10^4 J$$

【解法<二>】：

$$P = \frac{W}{t} = F \times v = f \times v = mgv$$

$$= 10^2 \times 10 \times 10 = 10^4$$

範例 12：

【解答】：60

【解析】：

$$\sin \theta = \frac{1}{50}$$

$$F = mg \sin \theta + f_k$$

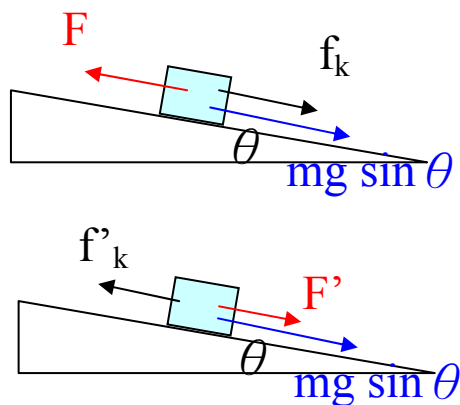
$$P = F \times 40$$

$$f_k = k \times 40 = \frac{mg}{25}$$

$$mg \sin \theta + F' = f_k'$$

$$P = F' \times v'$$

$$f_k' = kv' \quad \therefore v' = 60 m/s$$



範例 13：

【解答】：(a) $\frac{wv^2}{2(w+f)g}$ (b) $v\sqrt{\frac{w-f}{w+f}}$

【解析】：

(a) 【解法<一>----力學解法】：

$$w + f = \frac{w}{g} \cdot a \Rightarrow a = \frac{g}{w} (w + f) \downarrow$$

$$\therefore 0^2 = v^2 + 2(-a)h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2a} = \frac{wv^2}{2g(w+f)}$$

【解法<二>----能量解法】：

減少的 E_k = 增加的 $U_g + Heat$ 。

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH + f \cdot H$$

$$\therefore H = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg + f}$$

(b) 【解法<一>----力學解法】：

下降時阻力朝上 $\Rightarrow$

$$w - f = \frac{w}{g} a' \Rightarrow a' = \frac{g}{w} (w - f)$$

$$v'^2 = 0^2 + 2a'h = \left(\frac{w-f}{w+g}\right) v^2 \Rightarrow v' = v \sqrt{\frac{w-f}{w+g}}$$

【解法<二>----能量解法】：

減少的 E_K = 增加的 $Heat$ 。

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = f \cdot 2H$$

回到原出發點 $\Rightarrow$ 重力位能無變化

範例 14：

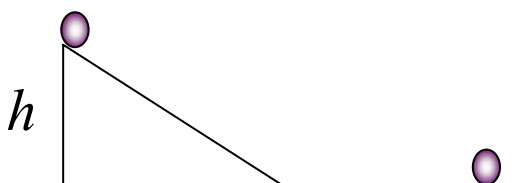
【解答】：C

【解析】：

$$mgh = \mu \times mg \times S (\text{與 } m \text{ 無關})$$

質量愈大，造成之 f 愈大

$$\Rightarrow h = \mu \times S = 0.4 \times 5 = 2m$$



範例 15：

【解答】：(B)

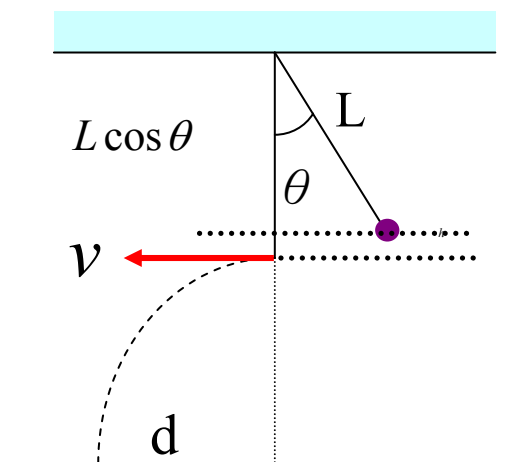
【解析】：

$$mgL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$$

$$d = v \times t = \sqrt{2g(L - L \cos \theta)} \times \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

$$= 2L\sqrt{1 - \cos \theta}$$



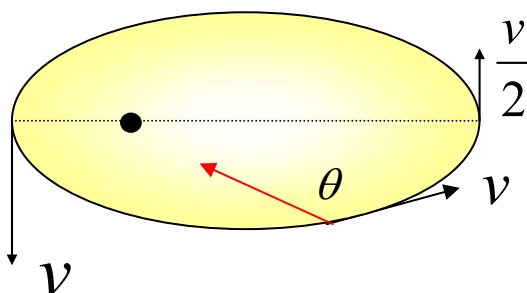
範例 16：

【解答】： $\frac{5}{4}mv^2$

【解析】：

$$(m+2m)V = m \times 0 + 2m \times v' \Rightarrow v' = \frac{3}{2}v$$

$$\begin{aligned} W = \Delta E &= \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{3}{2}v\right)^2 - \frac{1}{2}(2m)v^2 \\ &= \frac{1}{2}(2mv^2)\frac{5}{4} = \frac{5}{4}mv^2 \end{aligned}$$



範例 17：

【解答】： $-\frac{3}{8}mv^2$

【解析】：

近日點到遠日點， $\theta > 90^\circ$ 萬有引力對行星做負功

$$W = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{3}{8}mv^2$$

動能減少=增加的重力位能

範例 18：

【解答】： $\frac{1}{2}mgh$

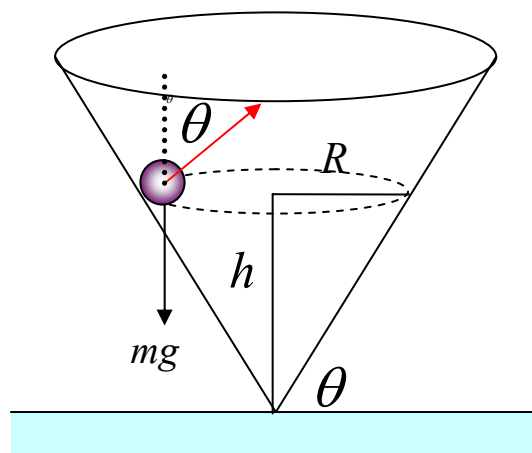
【解析】：

圓周運動 $\Rightarrow$ 找什麼力提供向心力

$$\begin{cases} N \cos \theta = mg \\ N \sin \theta = m \frac{v^2}{R} = \frac{2E_K}{h \cot \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2E_K}{h \cot \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\therefore E_K = \frac{1}{2}mgh \tan \theta \cot \theta = \frac{1}{2}mgh$$



範例 19：

【解答】： $\frac{1}{2}mgL \sin \theta \tan \theta$

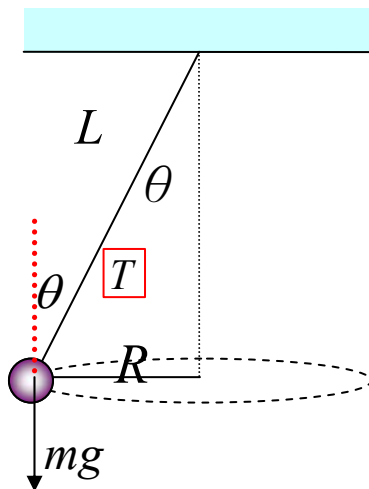
【解析】：

錐動擺 $\Rightarrow$ 找什麼力提供向心力

$$\begin{cases} T \cos \theta = mg \\ T \sin \theta = m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{2E_K}{L \sin \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2E_K}{L \sin \theta \times mg} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\therefore E_K = \frac{1}{2}mgL \sin \theta \tan \theta$$



範例 20：

【解答】：(1) $m_2 : m_1$ (2) $\sqrt{m_2} : \sqrt{m_1}$

【解析】：

減少的 $E_K = \text{Heat}$

(1) $E_K = \mu \times mg \times S \Rightarrow S \propto \frac{1}{m}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

(2) $J = \Delta P = F \Delta t$

$$E_K = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2mE_K}$$

$$\Delta P = P = \sqrt{2mE_K} = \mu \times mg \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t \propto \frac{1}{\sqrt{m}} \therefore \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

範例 21：

【解答】：(1) $m_2^2 : m_1^2$ (2) $m_2 : m_1$

【解析】：

減少的 $E_K = \text{Heat}$

(1) $E_K = \mu \times mg \times S$

$$\Rightarrow \frac{P^2}{2m} = \mu \times mg \times S$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

(2) $J = \Delta P = F \Delta t$

$$\Rightarrow P = \mu \times mg \Delta t$$

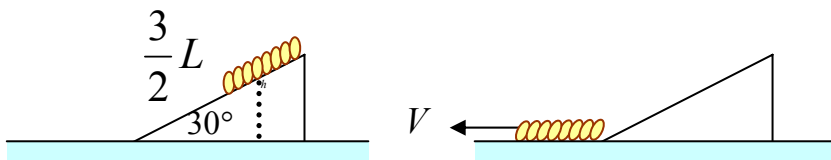
$$\Delta t \propto \frac{1}{m}$$

$$\therefore \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

範例 22：

【解答】： $v = \sqrt{\frac{3gL}{2}}$

【解析】：



$$h = \frac{3}{2}L \times \sin 30^\circ = \frac{3}{4}L$$

找質心落下之高度 $\Rightarrow$ 增加的 E_k = 減少的 U_g

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(\frac{3}{4}L\right) \quad v = \sqrt{\frac{3gL}{2}}$$

範例 23：

【解答】：(1) $W = mg \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - mg \cdot \frac{a}{2}$ (2) $W = mg \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{mgb}{2}$

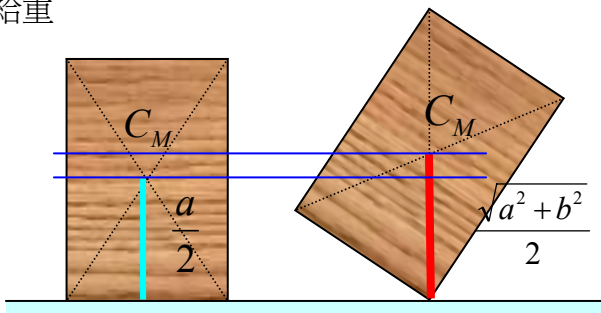
【解析】：

(1)

當質心超過對角線後即可放手，其餘交給重力作功解決

作功 = 增加的位能

$$W = mg \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - mg \cdot \frac{a}{2}$$

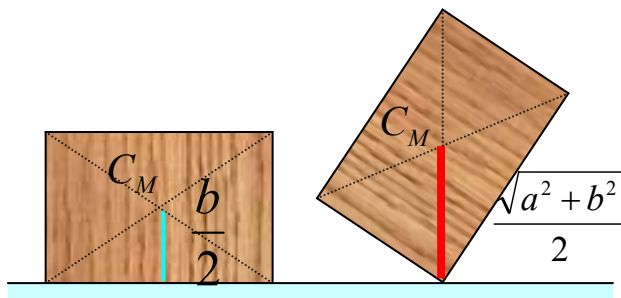


(2) 當質心超過對角線後即可放手，其餘交給重力作功解決

力作功解決

作功 = 增加的位能

$$W = mg \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{mgb}{2}$$



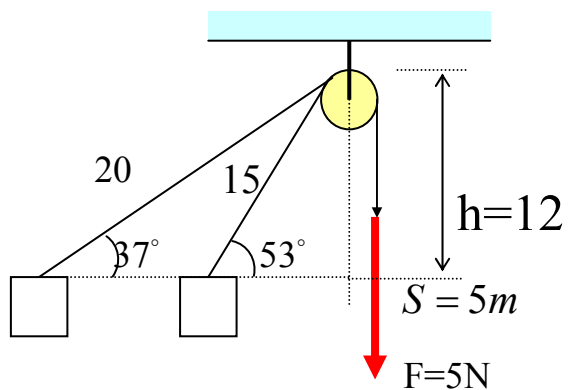
範例 24：

【解答】：25J

【解析】：

施力 F 拉動的距離 $S=20-15=5$

$$W = F \times S = 5 \times 5 = 25J$$

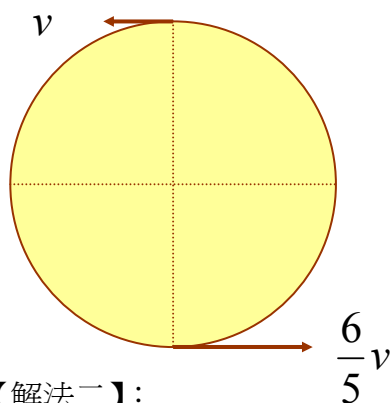


範例 25：

【解答】：E

【解析】：

【解法一】：



【解法二】：

$$\sqrt{(x+4)gR} = \frac{6}{5}\sqrt{xgR}$$

$$x+4 = \frac{36}{25}x$$

$$\therefore x = \frac{100}{11}$$

$$\Delta E_k = \Delta U_g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{6}{5}v\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mg2R$$

$$\Rightarrow \frac{11}{25}v^2 = 4gR$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{100}{11}gR}$$

範例 26：

【解答】： $\sqrt{\frac{2}{9}gL}$

【解析】：

變力、軌跡非直線、非等速

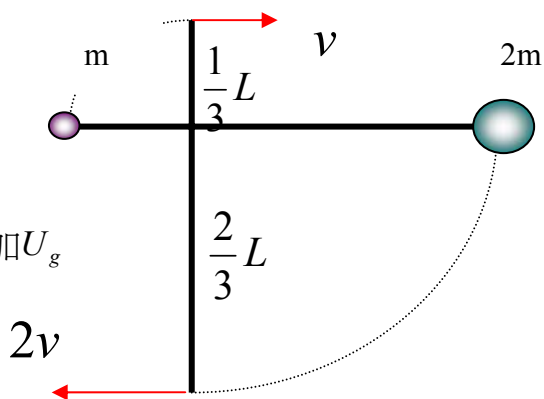
$$v = r \cdot \omega \propto r$$

$$(2m)g\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)(2v)^2 + mg\left(\frac{L}{3}\right)$$

$$2m \text{ 減少 } U_g = m \text{ 增加 } E_K + 2m \text{ 增加 } E_K + m \text{ 增加 } U_g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 \times 9 = mgL$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2}{9}gL}$$



範例 27：

【解答】：A

【解析】：

若從同高度放手，則不可能達到同高度 $\Rightarrow$ 位能相同，但 B 點已具 E_K

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{gR})^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{R}{2}$$

範例 28：

【解答】：3/5

【解析】：

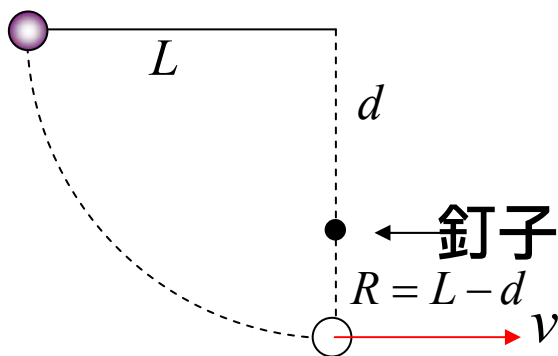
$$v = \sqrt{2gL} \geq \sqrt{5gR}$$

$$\sqrt{2gL} = \sqrt{5gR} = \sqrt{5g(L-d)}$$

$$\Rightarrow 2L = 5L - 5d$$

$$\therefore 5d = 3L$$

$$\frac{d}{L} = \frac{3}{5}$$

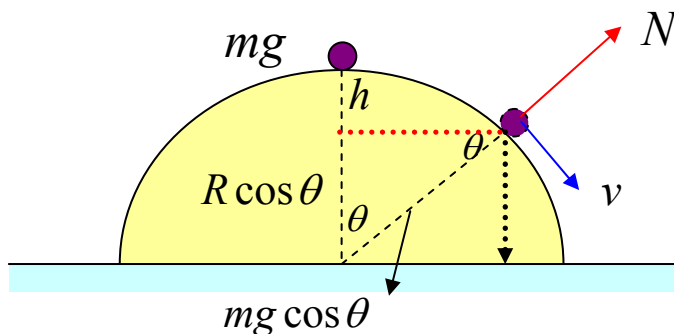


範例 29：

【解答】： 48.2°

【解析】：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = mg(R - R\cos\theta) \\ mg\cos\theta - N = F_c = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$



恰滑出時 $N = 0$ (接觸力 = 0)

$$\Rightarrow mg\cos\theta = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{R}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3}, \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

範例 30：

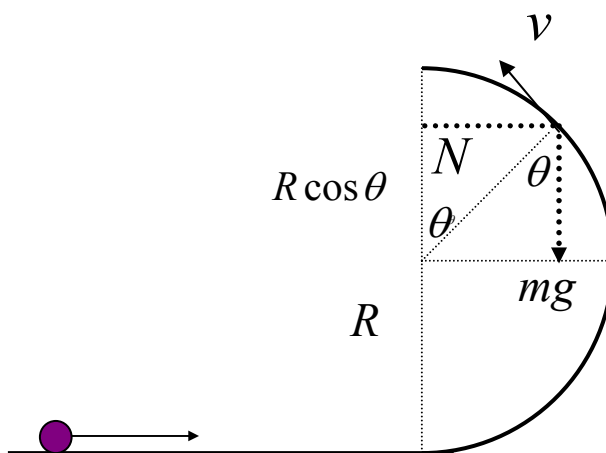
【解答】： 48.2°

【解析】：

$$\sqrt{4gR} < \sqrt{5gR}$$

所以無法作一完整之鉛直面圓周運動

增加的 E_k = 減少的 U_g



$$\begin{cases} \frac{1}{2}mg(\sqrt{4gR})^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mg(R + R\cos\theta) \\ mg\cos\theta + N = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

恰滑出時 $N=0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \quad \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \cong 48.2^\circ$

範例 31：

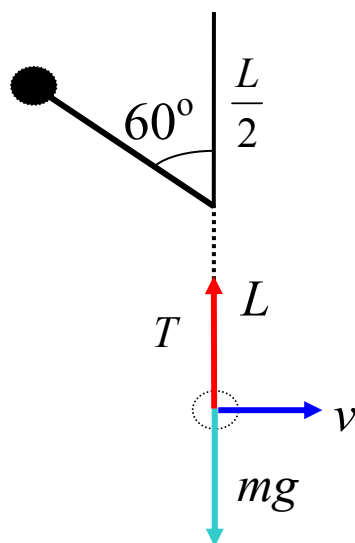
【解答】：D

【解析】：

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \frac{3}{2}L$$

$$T - mg = \frac{mv^2}{L}$$

$$\Rightarrow T = 4mg$$



範例 32：

【解答】：1/4

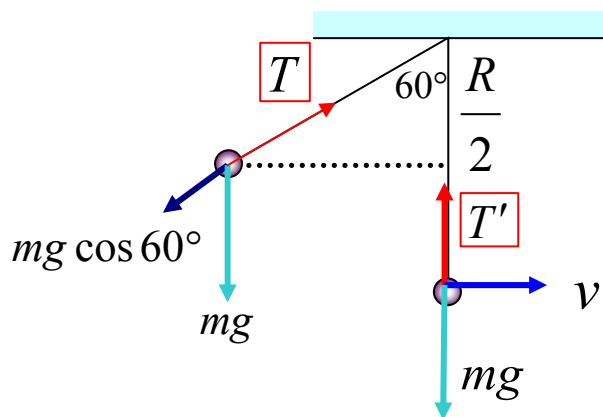
【解析】：

最高點：

$$V = 0 \text{ 不代表 } F_{\text{合}} = 0$$

$$T - mg \cos 60^\circ = m \frac{v^2}{R} = 0$$

$$\Rightarrow T = mg \cos 60^\circ = \frac{1}{2}mg$$



最低點：

增加的 E_k = 減少的 U_g

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \frac{R}{2}$$

$$T' - mg = m \frac{v^2}{R} = \frac{mgR}{R} \Rightarrow T' = 2mg \quad \therefore \frac{T}{T'} = \frac{\frac{1}{2}mg}{2mg} = \frac{1}{4}$$

範例 33：

【解答】：
$$\sqrt{\frac{2m^2 gH}{(M+m)M}}$$

【解析】：

水平方向遵守動量守恆 $\Rightarrow mv_m = Mv_M$

力學能守恆

$$\Rightarrow \Delta E_K = U_g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = mgH$$

$$E_K = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \propto \frac{1}{m}$$

物體m：
$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{M}{(M+m)} \cdot mgH \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2M}{(M+m)} \cdot gH}$$

滑車M：
$$\frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{m}{(M+m)} \cdot mgH \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2m^2}{(M+m)M} \cdot gH}$$

範例 34：

【解答】：1. $\sqrt{\frac{2M}{M+m}} E$ 2. $\sqrt{\frac{2E}{m}}$

【解析】：

1. 水平方向定量守恆 $\Rightarrow mv_m = Mv_M$ 力學能守恆 $\Rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = E$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{M}{M+m} E \quad \therefore v_m = \sqrt{\frac{2M}{m(M+m)} E}$$

2. 砲台本身固定 $\Rightarrow$ 地板對砲台施力，動量不守恆，所以能量全部給砲彈

$$\frac{1}{2}mv_m'^2 = E, \therefore v_m' = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

範例 35：

【解答】：
$$\sqrt{\frac{2k \cdot q_1 \cdot q_2 m_1}{dm_2(m_1 + m_2)}}$$

【解析】：

(庫侖力為內力 $\Rightarrow$ 動量守恆)

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{k \times q_1 q_2}{d} - 0 \end{cases} \quad \therefore v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1 q_2 m_1}{d \cdot m_2(m_2 + m_1)}}$$

範例 36：

$$\text{【解答】： } v_1 = \sqrt{\frac{m_2 k R^2}{(m_1 + m_2) m_1}} \quad ; \quad v_2 = \sqrt{\frac{m_1 k R^2}{(m_1 + m_2) m_2}}$$

【解析】：

(彈力為內力 $\Rightarrow$ 動量守恆)

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} k R^2 \end{cases}$$

$$m_1 \text{最大速率：} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \times \frac{1}{2} k R^2 \quad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{m_2 k R^2}{(m_1 + m_2) m_1}}$$

$$m_2 \text{最大速率：} \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \times \frac{1}{2} k R^2 \quad \therefore v_2 = \sqrt{\frac{m_1 k R^2}{(m_1 + m_2) m_2}}$$

範例 37：

$$\text{【解答】： } \sqrt{2gR} (\cong 11.2 \text{ km/s})$$

【解析】：

增加的 E_K = 減少的 U

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \left| 0 - \left(-\frac{GMm}{R} \right) \right| \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ g &= \frac{GM}{R^2} \\ \therefore v &= \sqrt{2gR} \cong 11.2 \text{ km/s} \end{aligned}$$

範例 38：

$$\text{【解答】： } \sqrt{gR}$$

【解析】：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \left(-\frac{GMm}{2R} \right) - \left(-\frac{GMm}{R} \right) = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} \end{aligned}$$

範例 39：

【解答】：(1) $-\frac{2}{3}mgR$ (2) $-\frac{11}{8}mgR$ (3) $\frac{1}{3}mgR; -\frac{3}{8}mgR$

【解析】：

$$(1) U_{\frac{3}{2}R} = -\frac{2}{3} \frac{GMm}{R} = -\frac{2}{3}mgR$$

$$(2) U_{\frac{1}{2}R} = -\frac{11GMm}{8R} = -\frac{11}{8}mgR$$

$$(3) U_R = -\frac{GMm}{R} = -mgR, \text{ 令 } U_R' = 0$$

$$\Rightarrow U_{\frac{3}{2}R}' = U_{\frac{3}{2}R} - U_R = (-\frac{2}{3}mgR) - (-mgR) = \frac{1}{3}mgR$$

$$U_{\frac{1}{2}R}' = U_{\frac{1}{2}R} - U_R = (-\frac{11}{8}mgR) - (-mgR) = -\frac{3}{8}mgR$$

範例 40：

【解答】：(1) $\sqrt{gR}$ (2) $\sqrt{gR}$

【解析】：

(1) 增加之 $E_K =$ 減少之 U

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = (-\frac{GMm}{R}) - (-\frac{3}{2}\frac{GMm}{R}) = \frac{GMm}{2R} \Rightarrow v = \sqrt{gR}$$

比較地表人造衛星： $\frac{GMm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR}$

S.H.M 為等速率圓周運動之投影

(2) 零位面改變，相對距離不變 $\Rightarrow \Delta U$ 不變

範例 41：

【解答】：(1) $\frac{1}{8}\frac{GMmR}{R^2}; \frac{1}{8}\frac{GMmR}{R^2}$ (2) 0

【解析】：

(1) 距地面 $R =$ 距地心 $2R$ (軌道加倍 $2R \rightarrow 4R$)

$$W = E_{4R} - E_{2R} = [-\frac{GMm}{2(4R)}] - [-\frac{GMm}{2(2R)}] = \frac{1}{8}\frac{GMmR}{R^2} = \frac{1}{8}mgR$$

$$\Delta E_K = E_{K2R} - E_{K4R} = \frac{GMm}{2(2R)} - \frac{GMm}{2(4R)} = \frac{1}{8}mgR$$

$$\Delta U = U_{4R} - U_{2R} = \left(-\frac{GMm}{4R}\right) - \left(-\frac{GMm}{2R}\right) = \frac{1}{4}mgR = \frac{1}{8}mgR \times 2$$

增加之 $U =$ 外力作功 W + 減少之 E_K

(2)

$$W = U_{4R} - E_{2R} = \left(-\frac{GMm}{4R}\right) - \left(-\frac{GMm}{2(2R)}\right) = 0$$

(在 $4R$ 處只有位能)

$\Rightarrow$ 只需鉛直轉 90° 即可，在 $3R$ 處速率恰為 0 (類似鉛直上拋的頂點)

範例 42：

【解答】： $2R$

【解析】：

$$U = -\frac{GMm}{R} = -2K; \quad E_K = \frac{GMm}{2R} = K; \quad E = U + E_K = -\frac{GMm}{2R} = -K$$

$$E' = -K + \frac{1}{2}K = -\frac{1}{2}K \quad \therefore R' = 2R$$

給予能量使之向外移動(低能階到高能階)

範例 43：

【解答】： $\sqrt{\frac{2M^2G}{r(M+m)}}$

【解析】：

$$\begin{cases} mv_m = Mv_M \\ \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \left(-\frac{GMm}{r}\right) - \left(-\frac{GMm}{r/2}\right) = \frac{GMm}{r} \end{cases}$$

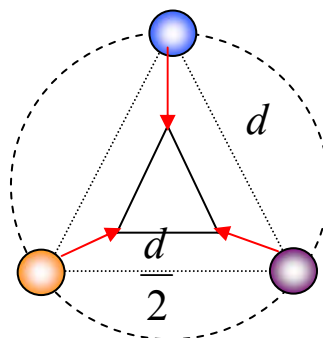
$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{M}{M+m} \times \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2M^2G}{r(M+m)}}$$

範例 44：

【解答】： $\frac{3Gm^2}{d}$

【解析】：

增加之 $E_K =$ 減少之 U (兩兩一組)



$$\Delta E_k = \Delta U = \left(-\frac{Gm^2}{d}\right) \times 3 - \left(-\frac{Gm^2}{\frac{d}{2}}\right) \times 3 = \frac{3Gm^2}{d}$$

題號編排有誤,原範例 45 改成牛刀小試,故無範例 45

範例 46：

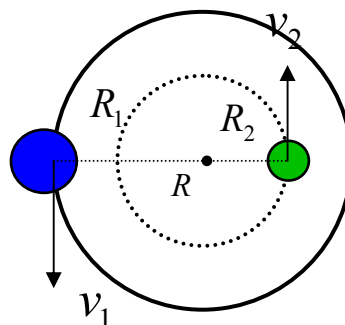
【解答】：
$$\sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1+m_2)R}}$$

【解析】：

《力學》：
$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = \frac{m_1v_1^2}{R_1} = \frac{2E_{k1}}{\frac{m_2}{m_1+m_2}R} = \frac{2E_{k2}}{\frac{m_1}{m_1+m_2}R}$$

《能量》：
$$E_{k1} = \frac{Gm_1m_2}{2R} \times \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$E_{k2} = \frac{Gm_1m_2}{2R} \times \frac{m_1}{m_1+m_2}$$



範例 47：

【解答】：
$$\sqrt{\frac{Gm}{R}}$$

【解析】：

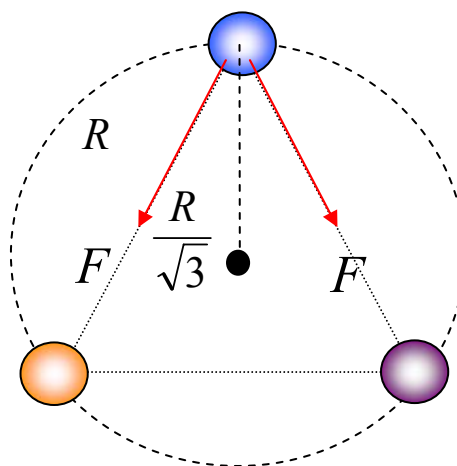
【力學】：找什麼力提供向心力

$$F \cos 30^\circ \times 2 = F_c$$

$$\frac{Gmm}{R^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = m \frac{v^2}{\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{R}}$$

【能量】：

$$\frac{Gmm}{2R} \times 3 = 3 \times \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{R}}$$



範例 48：

【解答】：(1) $3mgR/4$ (2) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$ (3) $mgR/4$ (4) $\frac{GMm}{12R}$

【解析】：

$$\begin{aligned} (1) \quad W &= E_{2R} - U_R \quad (\text{地表 } E_K \cong 0) \\ &= \left(-\frac{GMm}{2 \times 2R}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{3GMm}{4R} = \frac{3}{4}mgR \end{aligned}$$

$$(2) \quad E_K = \frac{GMm}{2(2R)} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

$$(3) \quad E_b = -E = \frac{GMm}{2(2R)} = \frac{1}{4}mgR$$

$$(4) \quad W' = E_{3R} - E_{2R} = \left(-\frac{GMm}{2 \times 3R}\right) - \left(-\frac{GMm}{2 \times 2R}\right)$$

範例 49：

【解答】：D

【解析】：

$$E_b = -E = \frac{Gmm}{2(2r)} = \frac{Gm^2}{4r}$$

範例 50：

【解答】：BD

【解析】：

解題關鍵：1) 越靠近太陽的行星，速率越 大，週期越 小

2) 人造衛星的宿命是 Earth

$$1. \quad E = -\frac{GMm}{2r}$$

$$2. \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

範例 51：

【解答】：10

【解析】：

$$W = \left(-\frac{GMm}{d}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right) \Rightarrow 9\frac{GMm}{d} + \frac{GMm}{d} = \frac{GMm}{R}; \quad \therefore d = 10R$$

$$\frac{W}{9} = -E = -U = \frac{GMm}{d}$$

範例 52：

【解答】：(a) $\frac{2\pi GM}{v^3}$ (b) $\frac{GM}{v^2}$ (c) $(2 - \sqrt{2})v$ (d) $(3 - 2\sqrt{2})mv^2$

【解析】：

※此題必須先解(b)，再解(a)，如果看不出這點，會解不出來！

(b) 萬有引力提供向心力： $\frac{GM(2m)}{R^2} = (2m)\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{GM}{v^2}$

(a) 利用等速率圓周運動之公式： $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi GM}{v^3}$

(c)

$$E_e = -U = \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v \quad (\text{母船速率})$$

母船與登月艇動量守恆

$$\Rightarrow (m+m)v = m\sqrt{2}v + mv' \quad \therefore v' = (2 - \sqrt{2})v \quad (\text{登月艇速率})$$

(d) $W = \Delta E = E_K' - E_K$

$$= \left\{ \frac{1}{2}m(\sqrt{2}v)^2 + \frac{1}{2}m[(2 - \sqrt{2})v]^2 \right\} - \frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}mv^2(2 + 4 + 2 - 4\sqrt{2} - 2)$$

$$= (3 - 2\sqrt{2})mv^2$$

範例 53：

【解答】：(a) 1:1 (b) 1:2 (c) 4:1 (d) 4:1

【解析】：

(a)

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \frac{\frac{4}{1^2}}{\frac{1}{1^2}} = \frac{4}{1} \quad (\text{“各”有一小行星繞行，A、B 恆星半徑未知})$$

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R \propto \sqrt[3]{\frac{M}{\rho}} \quad \therefore \frac{R_A}{R_B} = \sqrt[3]{\frac{\frac{4}{1}}{\frac{1}{1}}} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \frac{\frac{4}{2^2}}{\frac{1}{1^2}} = 1$$

R: 恆星半徑
r: 軌道半徑

$$(b) \quad \frac{GMm}{r^2} = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{\frac{2^3}{4}}{\frac{1^3}{1}}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \xrightarrow{\text{改錯}} \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{\frac{1^3}{4}}{\frac{1^3}{1}}} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \quad U = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow \frac{U_A}{U_B} = \frac{4}{1}$$

(d)

$$E_K = \frac{GMm}{2r} \Rightarrow \frac{E_{KA}}{E_{KB}} = \frac{4}{1}$$

範例 54：

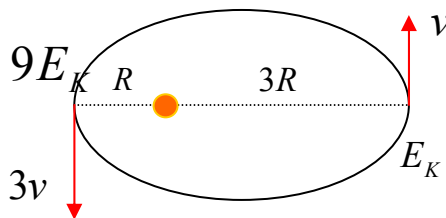
【解答】：(1) 9:1 (2) $\frac{2GMm}{3R}$

【解析】：

(1)

$$E_K = \frac{GMm}{2r} \propto \frac{1}{r} \quad \frac{E_{K\text{近}}}{E_{K\text{遠}}} = \frac{3}{1}$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{1} \quad \therefore \frac{E_{K1}}{E_{K2}} = \frac{9}{1}$$



(2)

$$\Delta E_K = \Delta U = \left(-\frac{GMm}{3R}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{2}{3} \frac{GMm}{R}$$

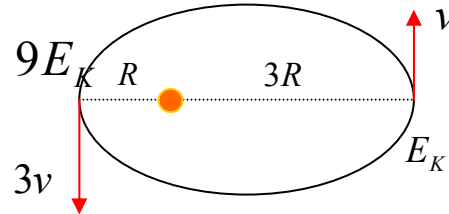
範例 55：

【解答】： $12 E_K$

【解析】：

$$9E_K - E_K = \left(-\frac{GMm}{3R}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{2}{3} \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{R} = 12E_K$$



【進階補充】：(1) $E_{b \text{ 近}} : E_{b \text{ 遠}} = 1:1$

(2) $E_{e \text{ 近}} : E_{e \text{ 遠}} = 3:1$

$$E_{\text{近}} = E_{K\text{近}} + U_{\text{近}} = 9E_K + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = -3E_K$$

$$E_K = E_{K\text{遠}} + U_{\text{遠}} = E_K + \left(-\frac{GMm}{3R}\right) = -3E_K$$

$$E_b = -E \neq \frac{GMm}{2r}$$

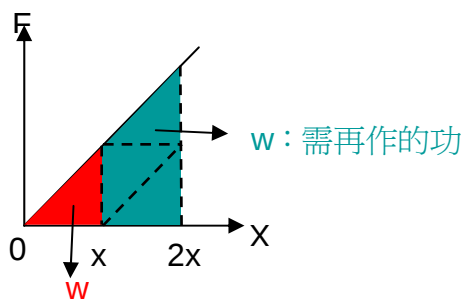
$$E_e = -U = \frac{GMm}{r}$$

位能只與距離有關，橢圓軌道速率不同， E_K 不同 $\rightarrow$ 總能 E 不同

範例 56：

【解答】： $3w$

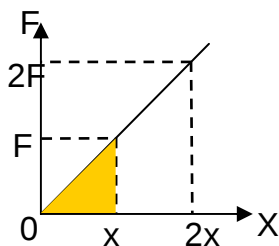
【解析】：



範例 57：

【解答】： (1) $\omega = \frac{1}{2} Fx$ (2) $U_s = \frac{1}{2} Fx$ (3) $\frac{3}{2} Fx$

【解析】：



(1)

$$\omega = \frac{1}{2}Fx \quad \omega = \bar{F} \cdot S = \frac{0+F}{2}x = \frac{1}{2}Fx \quad (\text{F-X 圖下面積})$$

(2)

$$U_s = \frac{1}{2}Fx \quad (\text{作功轉換為彈力位能})$$

(3)

$$\omega' = 3 \times \frac{1}{2}Fx = \frac{3}{2}Fx$$

範例 58：

$$\text{【解答】： (1) } V_1 = \sqrt{\frac{m_2}{(m_1 + m_2)m_1}}kR^2 \quad (2) 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}{k}}$$

【解析】：

(1)彈力為系統內力→動量守恆→動能與質量成反比

$$E_{k1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \left(\frac{1}{2}kR^2\right) \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{m_2}{(m_1 + m_2)m_1}}kR^2$$

(2)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}T' = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}{\frac{m_2}{m_1 + m_2}k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}{k}}$$

範例 59：

$$\text{【解答】： (1) } \sqrt{\frac{m}{k}}v \quad (2) \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

【解析】：

(1)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore x = \sqrt{\frac{m}{k}}v$$

(2)

$$\Delta T = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

範例 60：

【解答】： $mv\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}}$

【解析】：

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}kx^2 + Heat$$

Heat：無法求得

動量守恒： $mv = (M+m)v' \quad \therefore v' = \frac{mv}{m+M}$

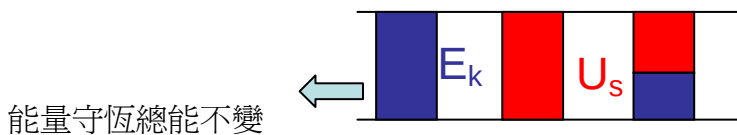
$$\frac{1}{2} \cdot (m+M) \cdot \frac{m^2v^2}{(m+M)^2} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = mv\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}}$$

範例 61：

【解答】：1. $\frac{5}{9}$ 2. $\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}x$

【解析】：



$$E = E_k + U_s = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

平衡點 端點 一般點

1.

最大動能 $E_{kMAX} = \frac{1}{2}kx^2 = \text{系統總能}$ ，

位移 $\frac{2}{3}x$ 時：動能 $E_k = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{5}{9}E_{kMAX}$

2.

$$\text{位移 } \frac{1}{2}x \text{ 時: 動能 } E_k = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{3}{4}E_{kMAX}$$

$$\text{速率} \propto \sqrt{E_k} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{MAX}$$

3.

$$E_k = \frac{1}{4}E_{kMAX} \rightarrow v' = \frac{1}{2}v$$

4.

$$\frac{1}{2}kx'^2 = \left[\frac{1}{2}k(x)^2 \right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x$$

範例 62 :

$$\text{【解答】: (1) } \frac{2mg}{k} \quad (2) \sqrt{\frac{m}{k}}g$$

【解析】:

(1)

$$mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2mg}{k}$$

(2)

平衡點(v 最大)。減少的 $U_g =$ 增加的 $E_k + U_s$

$$mg\left(\frac{\frac{x}{2}}{k}\right) = \frac{1}{2}k\left(\frac{\frac{x}{2}}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{m^2g^2}{2k} = \frac{1}{2}mv^2$$

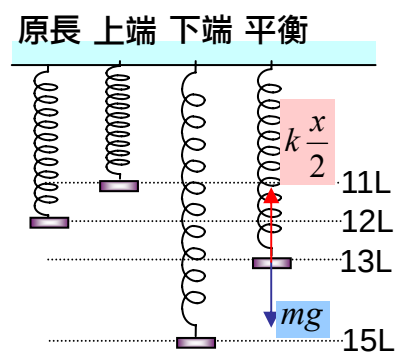
$$v = \sqrt{\frac{m}{k}}g$$

範例 63：

【解答】：(A)(B)(C)(E)

【解析】：

(A)



分析平衡點： $k \cdot L = mg \quad \therefore k = \frac{mg}{L}$

(B)

V_{Max} 位於平衡點 $\rightarrow$ 13L 處

(C)

由上端點 $\rightarrow$ 平衡點(11L $\rightarrow$ 13L)

減少的 $U_g =$ 增加的 E_k (U_s 不變 $\because$ 壓縮 L 與伸長 L 一樣)

$$E_k = mg2L$$

(D)

$$11L \text{ 壓縮 } L \quad U_s = \frac{1}{2}kL^2$$

$$15L \text{ 伸長 } 3L \quad U_s = \frac{1}{2}k(3L)^2$$

(E)

12L、14L $\rightarrow$ 對稱於 13L

範例 64：

【解答】： $\frac{1}{2}kx^2$

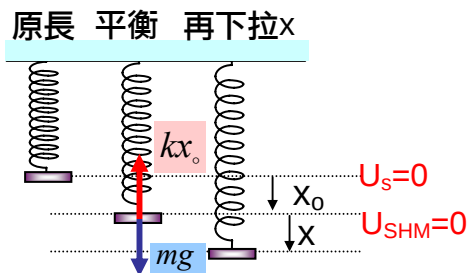
【解析】：

外力作功 + 減少位能 = 增加的彈性能

$$mg = kx_0$$

$$W + mgx = \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + kxx_0 - mgx = \frac{1}{2}kx^2$$



範例 65：

【解答】：(1) $\frac{mg}{k}$ (2) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (3) $\frac{2mg}{k}$ (4) $\frac{1}{2}k(\frac{2mg}{k})^2$ (5) $\frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2$ (6) $\sqrt{\frac{m}{k}}g$

【解析】：

(1) $mg = kx \quad \therefore x = R = \frac{mg}{k}$

(2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(3) $2R = \frac{2mg}{k}$

(4) $U_{S\cdot Max} = \frac{1}{2}k(\frac{2mg}{k})^2$

(5) 利用 SHM 位能

$$\frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2 = \frac{1}{2}mv^2 = E_k$$

(6)

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(\frac{mg}{k})}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \sqrt{\frac{m}{k}}g$$

範例 66：

【解答】：(1) $\sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot g$ (2) $\frac{mg}{2k}$

【解析】：

$$mg = 2kx \quad \therefore x = \frac{mg}{2k} = R$$

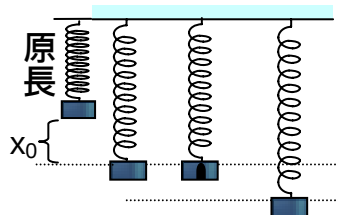
$$E_{KMAX} = \frac{1}{2} \cdot 2k \left(\frac{mg}{2k} \right)^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot g$$

範例 67：

【解答】：(a) $\frac{m^2 v^2}{2(m+M)} + \frac{M^2 g^2}{2k}$ (b) $L + \frac{mg}{k}$

【解析】：

(a)



$$Mg = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{Mg}{k}$$

不受外力，動量守恆

$$mv = (m+M)v' \quad v' = \frac{mv}{m+M}$$

$$E = E_k + U_s + U_g$$

$$= \frac{1}{2}(m+M) \frac{m^2 v^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2} kx_0^2 + 0$$

$$= \frac{m^2 v^2}{2(m+M)} + \frac{M^2 g^2}{2k}$$

(b)

$$mg = kx_0'$$

$$\Rightarrow L' = L + x_0' = L + \frac{mg}{k}$$

範例 68：

【解答】：(1) $\sqrt{\frac{m^2 v^2}{k(m+M)} + \left(\frac{mg}{k}\right)^2} - \frac{mg}{k}$ (2) $x + \frac{mg}{k}$ (3) $\frac{1}{2}kR^2$

【解析】：

(1)

減少之 E_k = 增加之 U_{SHM}

$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x + \frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

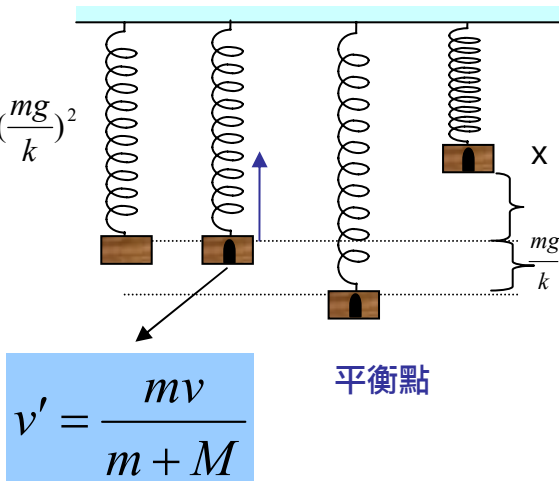
$$x = \sqrt{\frac{m^2 v^2}{k(m+M)} + \left(\frac{mg}{k}\right)^2} - \frac{mg}{k}$$

(2)

$$R = x + \frac{mg}{k}$$

(3)

$$E_k = \frac{1}{2}kR^2$$



範例 69：

【解答】：(1) $\frac{kD^2}{2mg}$ (2) $\frac{-2mg}{k} + 2D$

【解析】：

(1)

若 $m < \frac{kD}{2g}$ 表示物體較輕，可脫離彈簧

$$\frac{1}{2}kD^2 = mgx$$

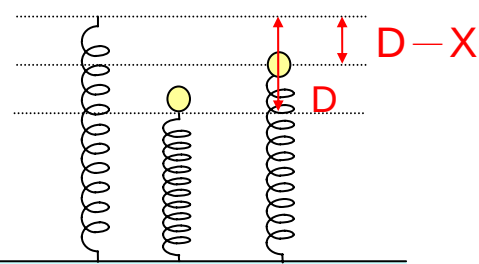
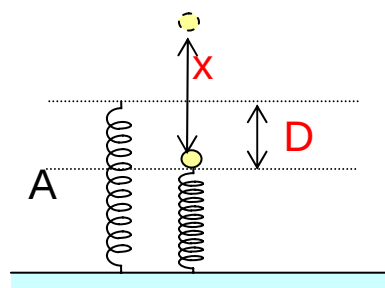
$$x = \frac{kD^2}{2mg}$$

(2)

若 $m > \frac{kD}{2g}$ 表示物體過重，無法脫離彈簧。

(彈力位能並未完全釋放)

$$\frac{1}{2}kD^2 = mgx + \frac{1}{2}k(D-x)^2$$



$$x = \frac{-2mg}{k} + 2D$$

範例 70：

【解答】： $v_1' = -8$ ； $v_2' = 7$

【解析】：

$$v_1' = \frac{2-3}{2+3}(+10) + \frac{2 \times 3}{2+3}(-5) = -2 - 6 = -8$$

$$v_2' = \frac{2 \times 2}{2+3}(+10) + \frac{3-2}{2+3}(-5) = 8 - 1 = 7$$

【自動校正機制】：彈性碰撞 $e = 1$

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \Rightarrow 10 - (-5) = 7 - (-8) \\ 15 = 15$$

範例 71：

【解答】：(1) $5:3$ (2) $\frac{7}{6}v$

【解析】：

(1)

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{v}{3}\right) = \frac{v}{2}$$

$$\Rightarrow 6m_1 - 6m_2 + 4m_2 = 3m_1 + 3m_2$$

$$\Rightarrow 3m_1 = 5m_2$$

$$\therefore m_1 : m_2 = 5 : 3$$

(2)

$$v_2' = \frac{2 \times 5}{5+3}v + \frac{3-5}{5+3}\left(\frac{v}{3}\right) = \frac{7}{6}v$$

【自動校正機制】：

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

$$\Rightarrow v - \frac{v}{3} = \frac{7}{6}v - \frac{1}{2}v$$

$$\frac{2}{3}v = \frac{4}{6}v$$

範例 72：

【解答】：(B)

【解析】：

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow -\sqrt{gL} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL}$$

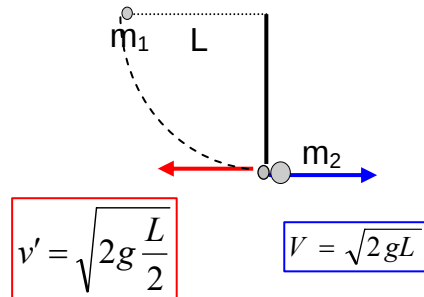
(m_1 、 m_2 速度反向，需加負號)

《沒加負號》

$$m_1 + m_2 = 1.4m_1 - 1.4m_2$$

$$2.4m_2 = 0.4m_1$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{6}{1}$$



《正確解法》

$$-m_1 - m_2 = 1.4m_1 - 1.4m_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{6} \cong 0.167$$

範例 73：

【解答】：(E)

【解析】：

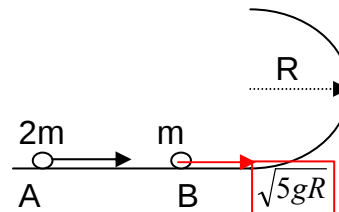
$$v_B' = \frac{2 \cdot 2m}{2m + m} v = \frac{4}{3} v = \sqrt{5gR}$$

$$v_A' = \frac{2m - m}{2m + m} v = \frac{1}{3} v = \frac{1}{4} v_B' = \frac{\sqrt{5gR}}{4}$$

→ A 減少之動能 = A 上升之重力位能

$$\frac{1}{2} (2m) \left(\frac{\sqrt{5gR}}{4} \right)^2 = (2m) gH$$

$$\therefore H = \frac{5}{32} R$$



範例 74：

【解答】：(B)(C)

【解析】：

(A)

$$m_1 v_0 + m_2 \times 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 v_0 - m_2 v_2}{m_1} > 0 \quad \text{只能確定 } P_1 > P_2$$

(B)

$$m_1 v_0 + m_2 \times 0 = m_1 \times 0 + m_2 v_0$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

非彈性不遵守此規則

(C)

$$e = \frac{\text{分離}v}{\text{接近}v} = \frac{v_2 - v_1}{v_0 - 0} = \frac{v_0}{v_0} = 1 \Leftrightarrow \text{彈性碰撞}$$

(D)

動量守恒，彈性非彈性皆適用

(E)

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_0 - 0} = \frac{0}{v_0} = 0 \Leftrightarrow \text{完全非彈性碰撞}$$

範例 75：

【解答】：1:4:12

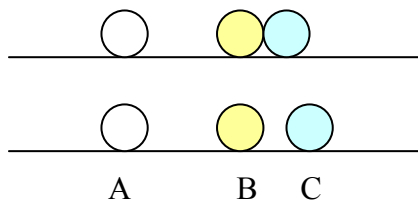
【解析】：

Step1: A 撞 B，B 撞 C；

B 靜止，C 彈出 [質量相等，速度交換]

$$v_A' = \frac{2m - m}{2m + m} v = \frac{1}{3} v$$

$$v_B' = \frac{2 \times 2m}{2m + m} v = \frac{4}{3} v = v_c'$$



Step2: A 再撞 B，B 彈出

$$v_A'' = \frac{2m - m}{2m + m} \left(\frac{1}{3} v\right) = \frac{1}{9} v$$

$$v_B'' = \frac{2 \times 2m}{2m + m} \left(\frac{1}{3} v\right) = \frac{4}{9} v$$

$$\Rightarrow v_A'' : v_B'' : v_c' = \frac{1}{9} v : \frac{4}{9} v : \frac{4}{3} v = 1 : 4 : 12$$

範例 76：

【解答】：(1) $\frac{1}{1840} E_k$ (2) $\frac{48}{169} E_k$

【解析】：

(1)

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 (v_1)^2 \times m_1 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E_{K1}' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 E_{K1}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= E_K - E_{K1}' = \left[\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] E_{K1} \\ &= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{K1} \end{aligned}$$

$$m_1 = 1840 \times 4 = 7360 (\alpha : {}^4_2\text{He})$$

$$\Delta E_{K1} = \frac{4 \times 7360 \times 1}{(7360 + 1)^2} E_{K1} \cong \frac{1}{1840} E_{K1}$$

(2)

碳獲得之動能 = 中子損失之動能

$$\Rightarrow E_{K1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{K1} = \frac{4 \times 1 \times 12}{(1 + 12)^2} E_{K1} = \frac{48}{169} E_{K1}$$

範例 77：

【解答】：1 amu

【解析】：

$$v_H' = v_2' = \frac{2 \times m}{m + 1} v$$

$$v_N' = v_2' = \frac{2 \times m}{m + 14} v$$

$$\Rightarrow \frac{v_H'}{v_N'} = \frac{m + 14}{m + 1} = \frac{7.5}{1} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore m = 1$$

p.73 「範例 63」應為「範例 78」

範例 78(63)：

【解答】： 60° ； $\frac{1}{2}v$

【解析】：

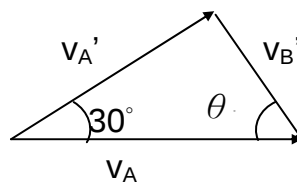
【解法(一)】：

設碰撞後 A、B 球之速率分別為 v'_A 與 v'_B ，

且 B 球射出方向與 A 球原入射方向之夾角為 θ ，則由動量守恆：

$$m\vec{v}_A = m\vec{v}'_A + m\vec{v}'_B \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}'_B$$

故 $\vec{v}_A$ 、 $\vec{v}'_A$ 與 $\vec{v}'_B$ 構成三角形如圖所示



又由動能守恆得

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv'^2_A + \frac{1}{2}mv'^2_B \Rightarrow v_A^2 = v'^2_A + v'^2_B$$

則由畢氏定理知 $\vec{v}'_A \perp \vec{v}'_B \Rightarrow 30^\circ + \theta = 90^\circ \therefore \theta = 60^\circ$

且由圖知 $v'_B = v_A \cos \theta = v \cdot 1/2 = v/2$

條件：

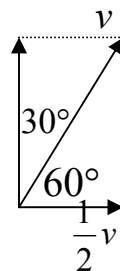
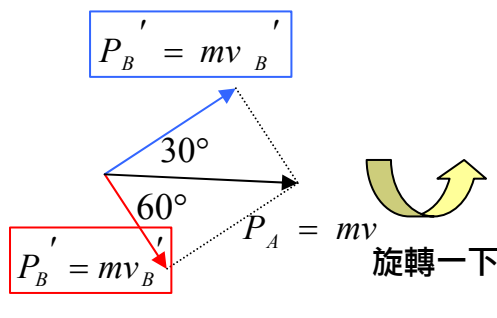
1. 質量相等

2. B 球靜止

3. 作彈性碰撞，A 與 B 必垂直，所以 B 之夾角 = 60°

【解法(二)】：解題關鍵 圖解動量守恆

$$\therefore v'_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v \quad v'_B = \frac{1}{2}v$$



範例 79：

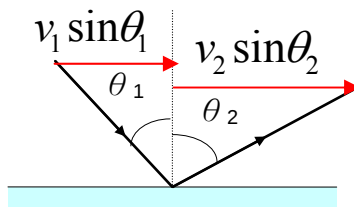
【解答】：(C)

【解析】：

先圈出題目的關鍵字。只有 水平 方向的動量才會守恆。

$$mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{c} \times \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{c}}{1}$$



範例 80：

【解答】： $2mv^2$

【解析】：

$$mv = \frac{m}{2}(3v) + \frac{m}{2}v'$$

$$v' = -v$$

$$\Delta E = E_K' - E_K = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) (3v)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) (v)^2 \right] - \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= 2mv^2$$

範例 81：

p.79 範例 81，「木塊 M 原本停在光滑平面上」

【解答】：(1) $\frac{m}{m+M}v$ (2) $\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M}v$ (3) $\frac{1}{2} \frac{mM}{(m+M)f}v^2$

【解析】：

(1)

$$v_C = \frac{m}{m+M}v$$

(2)

$$\Delta E_K = E_{Ki} = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M}v^2$$

(3)

增加的 Heat = 減少的動能 = 損失的內動能

$$E_{Ki} = Heat \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2 = f \times x$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \frac{mM}{(m+M)f} v^2$$

範例 82：

【解答】： $v \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$

【解析】：

$v_1 > v_2$ ：壓縮中； $v_1 < v_2$ ：分離中

達最大壓縮量時 $\Rightarrow v_1 = v_2 = v_c$

$\Rightarrow$ 廣義完全非彈性碰撞

增加的彈力位能 = 內動能

$$\Rightarrow E_{Ki} = U_s \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$x = v \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

範例 83

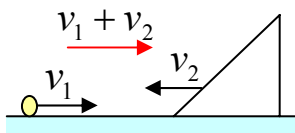
【解答】：(1) $\frac{1}{2} \frac{M}{(m+M)g} v^2$ (2) $\frac{1}{2} \frac{M}{(m+M)g} [v_1 + v_2]^2$

【解析】：

(1)

達最大高度時 $v_1 = v_2 = v_c$

$\Rightarrow$ 廣義完全非彈性碰撞



增加的重力位能 = 減少的動能

$$E_{Ki} = U_g \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2 = mgH$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{M}{(m+M)g} v^2$$

(2)

利用相對速度解題

$$\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} [v_1 - (-v_2)]^2 = mgH$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{M}{(m+M)g} (v_1 + v_2)^2$$

範例 84：

【解答】： $\frac{1}{2g\mu} \left(\frac{mv}{m+M} \right)^2$

【解析】：

內動能：在結合成合體時(碰撞中)損失之動能

$$(m+M)g\mu S = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2$$

$$S = \frac{1}{2g\mu} \left(\frac{mv}{m+M} \right)^2$$

範例 85：

【解答】： $mv\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}}$

【解析】：

最大壓縮時→內動能完全轉為彈力位能

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2$$

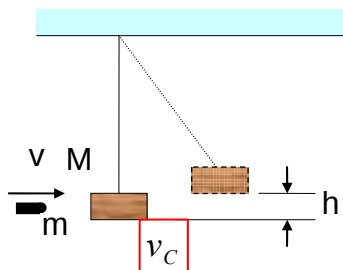
$$x = mv\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}}$$

範例 86：

【解答】： $\frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$

【解析】：

增加的合體重力位能 = 減少的合體末動能



$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = (m+M)gh$$

$$v = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$$

範例 87：

p.81 範例 87(E)「..碰撞之間的差為」→「..碰撞之間的時間差為」

【解答】：(B)(D)

【解析】：

(A)(B)

$$v_c = \frac{mv_0 + 2m \times 0}{m + 2m} = \frac{1}{3}v_0$$

碰撞屬內力， v_c 恆不變

(C)(D)

彈性碰撞

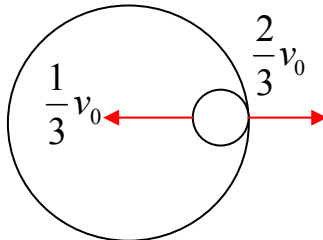
$$v'_1 = \frac{m - 2m}{m + 2m}v_0 = -\frac{1}{3}v_0 \text{ (小球)}$$

$$v'_2 = \frac{2m}{m + 2m}v_0 = \frac{2}{3}v_0 \text{ (圓環)}$$

校正機制 $v_1 - v_2 = v'_1 - v'_2$

(E)

$$\Delta t = \frac{d}{\frac{1}{3}v_0 + \frac{2}{3}v_0} = \frac{d}{v_0}$$



範例 88：

【解答】：(A)(C)(E)

【解析】：

(A)

$$J = F\Delta t = \Delta P = m\Delta v$$

$$\Rightarrow J = mv$$

$$\therefore v = \frac{J}{m}$$

(C)

$$v_c = \frac{m\frac{J}{m} + 2m \times 0}{m + 2m} = \frac{J}{3m}$$

(B)

$$v_{2m初} = 0 \quad (t \text{ 極小時來不及動})$$

(D)

$$E_{Kc} = \frac{1}{2}(m + 2m)\left(\frac{J}{3m}\right)^2 = \frac{J^2}{6m}$$

$$\text{or } \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + 2m}\left(\frac{J}{m}\right)^2 = \frac{J^2}{6m}$$

(E)

$$E_{Ki} = U_s \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{m2m}{m+2m} \left(\frac{J}{m}\right)^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2J^2}{3mk}}$$

範例 89：

【解答】：(1) $\sqrt{\frac{m+M}{M}}$ (2) $\frac{m+M}{M}$

【解析】：

(1)

大砲固定，大砲釋放之化學能全數給砲彈

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 = E$$

自由後退： $\frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{M}{m+M} E$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m+M}{M}}$$

(2)

木塊固定：所有動能轉換成摩擦所產熱能

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = f \cdot S_1$$

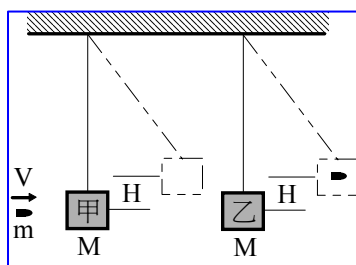
木塊不固定：只有一部分動能(內動能)變成熱能

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2 = f \cdot S_2$$

$$\Rightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{m+M}{M}$$

範例 90：

p.83 範例 90 缺圖：



【解答】：(A)

【解析】：

射入甲，動量守恒： $mv = mv' + M\sqrt{2gH}$ -----①

射入乙，動量守恒： $mv' = (m + M)\sqrt{2gH}$ -----②

$$\Rightarrow v' = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gH} \text{ -----③}$$

$$v = \frac{m + 2M}{m}\sqrt{2gH} \text{ -----④}$$

$$(A) \quad \frac{v'}{v} = \frac{m + M}{m + 2M} \cong \frac{1}{2} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}v \text{ -----⑤}$$

(B)

子彈在甲木塊內摩擦所生之熱能：

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}mv'^2 + E_{k\text{甲}}\right) \text{ -----⑥}$$

$$\text{將④⑤代入⑥得 } E_1 \doteq \left(\frac{3M^2 - Mm}{m}\right)gH \doteq \frac{3M^2}{m}gH$$

$$\text{子彈在乙木塊內摩擦所生之熱能： } E_2 = \frac{1}{2}mv^2 - E_{k\text{乙}} \text{ -----⑦}$$

將④代入⑦得

$$E_2 \doteq \left(\frac{M^2 - m^2 + mM}{m}\right)gH \doteq \frac{M^2}{m}gH$$

$$\therefore E_1 \neq E_2$$

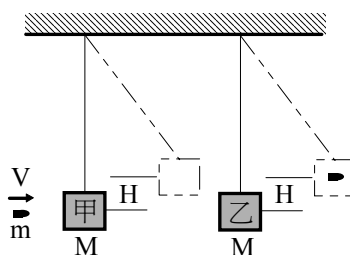
(C)

$$\text{損失之總能 } E' = E_1 + E_2 \doteq \frac{4M^2}{m^2}gH$$

$$\text{子彈原入射之動能 } E = \frac{1}{2}mv^2 \doteq \frac{4M^2}{m}gH$$

$$E' \doteq E$$

故知子彈的動能大部分轉變成摩擦所生之熱能



範例 91：

【解答】：(1) $\frac{1}{18}L$ (2) $\frac{10}{3}mg$

【解析】：

(1)

$$v_1' = \frac{m-2m}{m+2m}\sqrt{gL}$$

$$\Delta E_K = U_g \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(-\frac{\sqrt{gL}}{3}\right)^2 = mgH$$

$$\therefore H = \frac{1}{18}L$$

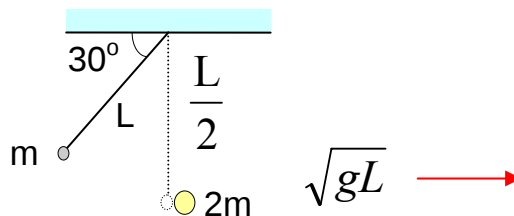
(2)

變成合體：完全非彈性碰撞

$$m\sqrt{gL} = (m+2m)v' \Rightarrow v' = \frac{1}{3}\sqrt{gL}$$

找什麼力提供向心力：

$$T - mg = 3m \frac{\left(\frac{\sqrt{gL}}{3}\right)^2}{L} = \frac{1}{3}mg \quad \therefore T = \frac{10}{3}mg$$



範例 92：

【解答】： $\frac{35}{34}$

【解析】：

鉛直方向抵消，水平方向動量守恆

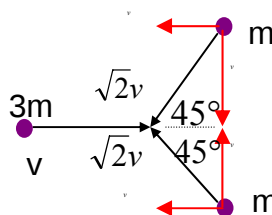
$$3mv + m(-v) \times 2 = 5m \times v' \Rightarrow v' = \frac{1}{5}v$$

$$E_K' = \frac{1}{2} \times 5m \left(\frac{1}{5}v\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \times \frac{1}{5}$$

$$E_K = \frac{1}{2} \times 3mv^2 + 2 \times \frac{1}{2}m(\sqrt{2}v)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \times 7$$

$$\Delta E_K = E_K - E_K' = \frac{1}{2}mv^2 \left(7 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 \times \frac{34}{5}$$



$$\therefore \frac{\Delta E_K}{E_K} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 \times \frac{34}{5}}{\frac{1}{2}mv^2 \times 7} = \frac{34}{35}$$

範例 94：

【解答】：(1) $M^1L^2T^{-2}$ (2) $M^1L^2T^{-3}$

【解析】：

$$(1) W = F \times S = ma \times S = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \Rightarrow [E] = M^1L^2T^{-2}$$

$$(2) [P] = M^1L^2T^{-3}$$

範例 95：

【解答】：(1) T^{-1} (2) $M^1L^1T^{-2}$ (3) $F \propto mr\omega^2$

【解析】：

$$(1) \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow [\omega] = T^{-1} \quad (2) F = ma \rightarrow [F] = M^1L^1T^{-2}$$

$$(3) F_C \propto m^a R^b \omega^c$$

$$M^1L^1T^{-2} = M^aL^bT^{-c}$$

$$\therefore a=1, b=1, c=2$$