

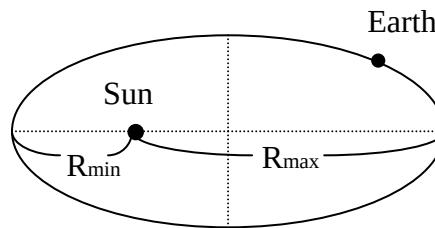
第六章 牛頓萬有引力

P.2

060101 天文中常用的距離單位

單 位	意 義	大 小
A.U. (天文單位)	日、地間的 <u>平均</u> 距離	1.496×10^{11} 公尺
光 年	光走一年的距離	9.46×10^{15} 公尺
備 註	A.U. = Astronomy Unit	

$$1 \text{ A.U.} = \frac{R_{\min} + R_{\max}}{2}$$



👉 【牛刀小試】：光年 (light year) 是 (A)時間 (B)距離 (C)質量 (D)光度的單位

060102 光速小常識：

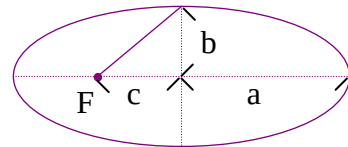
- 👉 1、光一秒走30 萬公里 = 3×10^8 公尺 = 3×10^{10} 公分
- 👉 2、光從太陽走到地球約 = 500 秒 (1 億 5000 萬公里) = 8.3分鐘
- 👉 3、光走出太陽系(冥王星) = 5.46小時
- 👉 4、光從地球走到月球 = 1.26秒
- 👉 5、光從北極星走到地球 = 100 年

P.4

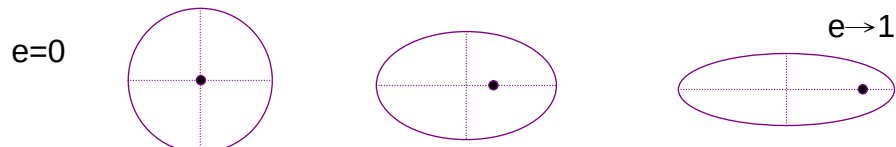
060104 橢圓(ellipse) 的基本概念

1 符號定義：

- ①半長軸：a；②長軸：2a；
- ③半短軸：b；④短軸：2b；
- ⑤焦距：c。



2 離心率(eccentricity)的意義：焦點離開中心的比率



3 離心率(eccentricity)的數學定義： $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0 \leq e < 1$ (圓的 $e=0$)

4 橢圓(ellipse) 面積： $A = \pi ab$
 eccentric 離心的；eccentricity 離心率

P.5

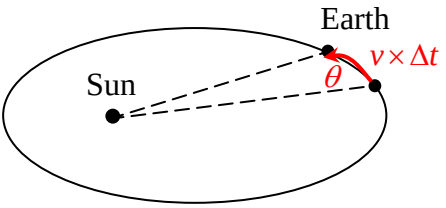
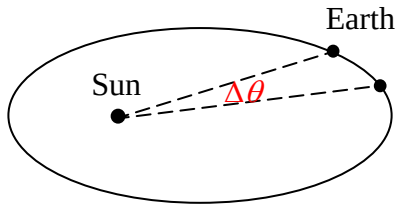
060106 克卜勒第二定律(Kepler's Second Law)

---等面積(速率)定律

 3、推導前的數學背景知識：

三角形面積公式	扇形面積公式
$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$	$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

 4、數學推導：

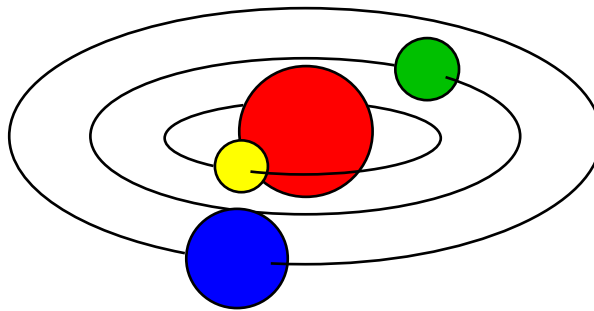
推導法(一)	推導法(二)
	
$\Delta A = \frac{1}{2} r (v \Delta t) \sin \theta$ $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v \sin \theta$	$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$ $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega$

P.6

6、(平均)面積速率的大小(key:看一圈)：

軌道種類	圓 形	橢 圓 形
面積速率	$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi R^2}{T}$	$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T}$

7、各行星的比較：



$$\frac{\Delta A_{\text{水}}}{\Delta t} = K_{\text{水}} < \frac{\Delta A_{\text{金}}}{\Delta t} = K_{\text{金}} < \frac{\Delta A_{\text{地}}}{\Delta t} = K_{\text{地}} < \dots < \frac{\Delta A_{\text{冥}}}{\Delta t} = K_{\text{冥}}$$



$K_{\text{水}} = K_{\text{金}} = K_{\text{地}}$ 嗎？ $K_{\text{地}} > K_{\text{金}} > K_{\text{水}}$

克卜勒三大定律 → 總整理

P.14

060120  克卜勒三大定律：

	描 述	公 式
第一定律： 軌道定律	行星在以太陽為焦點的橢圓軌道上運行	平均軌道半徑 $R = \frac{R_{\text{近}} + R_{\text{遠}}}{2}$
第二定律： 等面積速率定律	行星與太陽的連線在相同時間掃過相同面積	$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv \sin \theta = \text{const}$ $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega = \text{const}$
第三定律： 週期定律	平均距離的立方與週期的平方，兩者的比值為常數	$\frac{R^3}{T^2} = \text{const} ;$ 其中 $R = \frac{R_{\text{近}} + R_{\text{遠}}}{2}$
備 註	1、第二定律與第三定律的差別： 第二定律： <u>同一星球，不同位置</u> 第三定律： <u>不同星球</u> 2、第三定律必須繞同一中心星球轉	

P.17

060123 克卜勒定律的解題要訣

備 註	1、第二定律與第三定律的差別： 第二定律：<u>同一星球，不同位置</u> 第三定律：<u>不同星球</u> 2、第三定律必須繞同一中心星球轉
-----	---

P.27 一般衛星的圓周運動

人造衛星(artificial satellite)之軌道(orbit)速率：萬有引力 提供向心力 (centripetal force)

$$(3) \frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



人造衛星(artificial satellite)之軌道(orbit)週期：萬有引力 提供向心力

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$



P.28

060209 地球同步衛星：(synchronous satellite)

問題：地球同步衛星(synchronous satellite)的軌道(orbit)為何？

解法(一)：圓周運動的計算：萬有引力 提供向心力

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$



解法(二)：克卜勒第三定律--與 月球 比較

$$\frac{R_{\text{同}}^3}{T_{\text{同}}^2} = \frac{R_{\text{月}}^3}{T_{\text{月}}^2} \Rightarrow \frac{R_{\text{同}}^3}{1^2} = \frac{R_{\text{月}}^3}{27^2} \Rightarrow R_{\text{同}} = \frac{1}{9} R_{\text{月}}$$

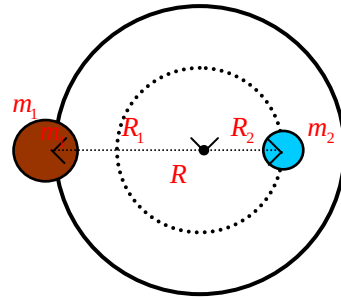


P.30

060213 雙星(binary star)運動

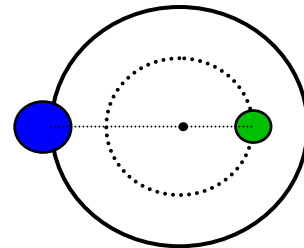
【軌道速率】：

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1 \frac{v_1^2}{\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)R}$$



【軌道週期】：

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1 \frac{4\pi^2 R_1}{T^2} \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1 \frac{4\pi^2 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)R}{T^2}$$



P.33

060217 牛頓萬有引力定律推出克卜勒第三定律

(行星運動)從牛頓的萬有引力定律推出克卜勒第三定律

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \propto M$$

$$\frac{GMm}{R^n} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^{n+1}}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow n = 2$$

060218 牛頓萬有引力定律與克卜勒第二定律之關係

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{\pi \sqrt{GMR}}{2\pi} \propto \sqrt{M} \times \sqrt{R}$$

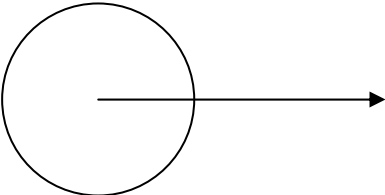
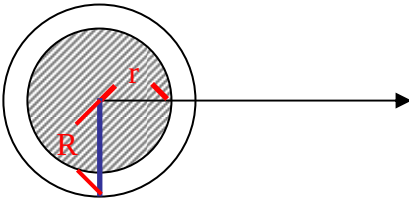
$$\frac{\Delta A_{\text{冥}}}{\Delta t} > \frac{\Delta A_{\text{海}}}{\Delta t} > \frac{\Delta A_{\text{天}}}{\Delta t} > \dots > \frac{\Delta A_{\text{水}}}{\Delta t} ,$$

$$\frac{\Delta A_{\text{冥}}}{\Delta t} = \frac{\pi 40^2}{248}$$

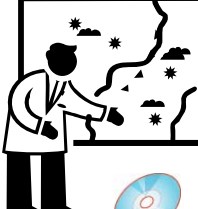
$$\frac{\Delta A_{\text{地}}}{\Delta t} = \frac{\pi 1^2}{1}$$

P.35

060303  地球的重力場(gravitational field) 假設地球為密度均勻的球體：

地球外部	地球內部
	
$g = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GMm}{r^2}}{m} = \frac{GM}{r^2}$	※ 均勻球殼對其內部物體不施力 $g = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GMm}{r^2}}{m} = \frac{GM'}{r^2} = \frac{G(\frac{r}{R})^3 M}{r^2} = \frac{GM}{R^3} r \propto r$
與距離平方成反比	與距離成正比

P.39



牛頓萬有引力定律→失重狀態

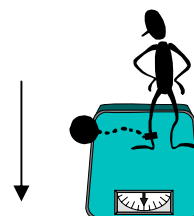
⇐我們在這裡! ⇨我们在这里! ⇨Here we are! ⇨ここです。

060309  失重狀態(等效重力 gravitational field 強度=0)：

- 1.(體重計)無正向力
- 2.(體重計)讀數=0
- 3.失重時，可能仍受重力(gravity)

(1)自由落體 + 平拋、斜拋：

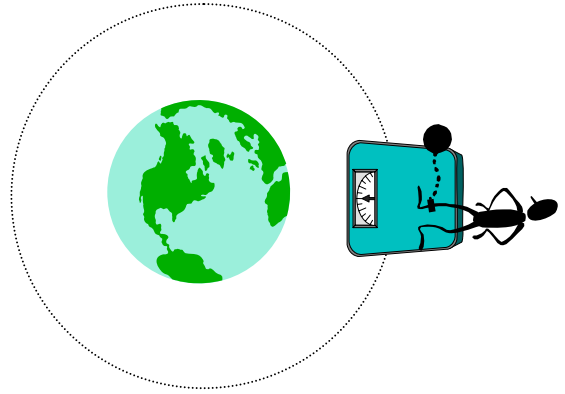
$$mg - N = ma \text{ if } a = g, N = 0$$



(2)做等速率圓周運動的軌道(orbit) (太

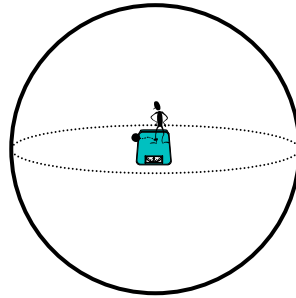
空中的失重與真空無關)：

$$mg - N = ma_c \quad \text{if } a_c = g, N = 0$$



(3)地心處：

$$g = 0$$



1.(69 日大)設一星球為密度均勻的球體，如一質點在此星球表面的重量為 W ，則此質點在此星球球心位置的重量？ (A)0 (B)0.5W (C)W (D)2W (E)無窮大

地心處 $g=0$ ，失重 $N=0$

2.(69 日大)一太空船熄掉引擎，進入離地面上 200 公里的圓形軌道，某人在地面上時的體重為 60 公斤，若此人在太空船內用彈簧秤量其體重，其結果應為？

(A)60kg (B)58.2kg (C)56.4kg (D)0kg

在等速率圓周運動的軌道上，失重 $N=0$

1. 某人在地面上時的體重為 60 公斤，若一電梯自由落下，此人立於此電梯的彈簧秤上，則彈簧秤的讀數為若干公斤重？

2. 某人在地面上時的體重為 60 公斤，若一電梯以 g 之加速度上升，此人立於此電梯的彈簧秤上，則彈簧秤的讀數為若干公斤重？

3. 某人在地面上時的體重為 60 公斤，若一電梯以 $g/2$ 之加速度下降，此人立於此電梯的彈簧秤上，則彈簧秤的讀數為若干公斤重？

$$1. g' = g - a = g - g = 0$$

$$2. g' = g + a = 2g \quad W' = 120\text{kgw}$$

$$3. g' = g - a = g - g/2 = g/2 \quad W' = 30\text{kgw}$$

第六章 詳解

範例 01：

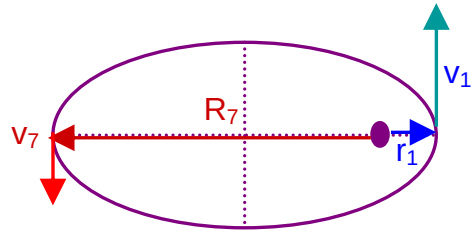
【解答】：(D)

【解析】： $r_1 v_1 = r_7 v_7$

$$\frac{v_7}{v_1} = \frac{r_1}{r_7} = \frac{0.98}{1.02}$$

<法 1> $\frac{v_7}{v_1} = \frac{r_1}{r_7} = \frac{0.98}{1.02} = \frac{1-0.02}{1+0.02} \cong 1-0.04$

<法 2> $\frac{v_7}{v_1} = \frac{r_1}{r_7} = \frac{0.98}{1.02} = 0.98(1+0.02)^{-1} \cong 0.98^2 = (1-0.02)^2 \cong 1-0.04 = 0.96$



範例 02：

【解答】：10

【解析】： $r_1 v_1 = r_2 v_2$

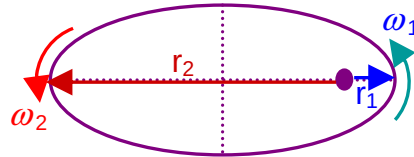
$$1 \times 1000 = 100 \times v_2 \quad v_2 = 10$$

範例 03：

【解答】：1:4

【解析】：

$$r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$



範例 04：

【解答】：9 : 1

【解析】：從 $r_1 v_1 = r_2 v_2$ 可得 $\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \propto \frac{r_2^2}{r_1^2}$

範例 05：

【解答】：1. $r = \frac{2A}{v}$ 2. $\frac{2A}{R}$ 3. $\sqrt{2A\omega}$

【解析】：1.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

$$A = \frac{1}{2} r v \Rightarrow r = \frac{2A}{v}$$

2.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}r^2\omega$$

$$A = \frac{1}{2}Rv \Rightarrow v = \frac{2A}{R}$$

3.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega$$

$$A = \frac{1}{2}r^2\omega \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2A}{\omega}}$$

$$v = r\omega = \sqrt{2A\omega}$$

範例 06：

【解答】：1.(E) 2.(A)

【解析】：1.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{\pi(2 \times 10^{12})^2}{10^6} = 4\pi \times 10^{18}$$

2.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi(2 \times 10^{12})(1 \times 10^{12})}{10^6}$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi \frac{(2 \times 10^{12})}{2} \frac{(1 \times 10^{12})}{2}}{10^6} = 0.5\pi \times 10^{18}$$

範例 07：

【解答】：10√10

【解析】：

$$\frac{R_{\pm}^3}{T_{\pm}^2} = \frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2} \Rightarrow \frac{10^3}{T_{\pm}^2} = \frac{1^3}{1^2} \Rightarrow T_{\pm} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$$

範例 08：

【解答】：1.(B)

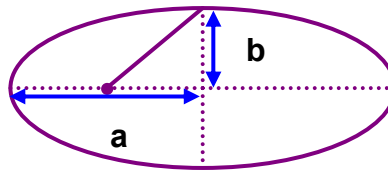
【解析】：

$$\frac{R_{\text{衛}}^3}{T_{\text{衛}}^2} = \frac{R_{\text{月}}^3}{T_{\text{月}}^2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{T_{\text{衛}}^2} = \frac{1^3}{27^2} \Rightarrow T = \sqrt{27}$$

範例 09：

【解答】：(B)(D)(E)

【解析】：



範例 10：

【解答】：(B)

【解析】：

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2} \Rightarrow \frac{R^3}{8^2} = \frac{1^3}{1^2} \Rightarrow R = 4 \Rightarrow 2a = 8$$

範例 11：

【解答】：(D)

【解析】：

$$\begin{aligned} \frac{R_{\text{海}}^3}{T_{\text{海}}^2} &= \frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2} \Rightarrow \frac{R^3}{2500^2} = \frac{1^3}{1^2} \\ \Rightarrow R &= \sqrt[3]{6250000} \\ &= \sqrt[3]{6.25 \times 10^6} = \sqrt[3]{6.25} \times 10^2 = \sqrt[3]{6.25} \times 100 = 1?? \\ \sqrt[3]{1} &< \sqrt[3]{6.25} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{6.25} < 2 \end{aligned}$$

範例 12：

【解答】：(B)

【解析】：

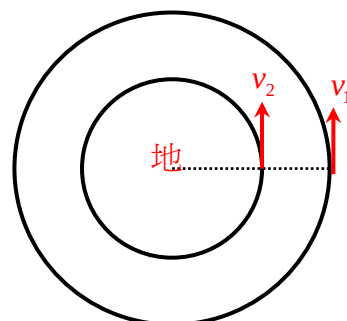
$$\begin{aligned} \frac{R_{\text{哈}}^3}{T_{\text{哈}}^2} &= \frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2} \Rightarrow \frac{R^3}{76^2} = \frac{1^3}{1^2} \\ \Rightarrow R &= \sqrt[3]{76^2} \cong \sqrt[3]{75^2} = \sqrt[3]{3^2 \times 5^4} = \sqrt[3]{3^3 \times 5^3 \times \frac{5}{3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \times 15 \cong \sqrt[3]{1.67} \times 16 \end{aligned}$$

範例 13：

【解答】：(D)

【解析】：

$$\begin{aligned} \frac{R_1^3}{T_1^2} &= \frac{R_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\frac{64}{1}} = \frac{4}{1}, v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} \\ &= \frac{R_1}{R_2} \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{1} \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

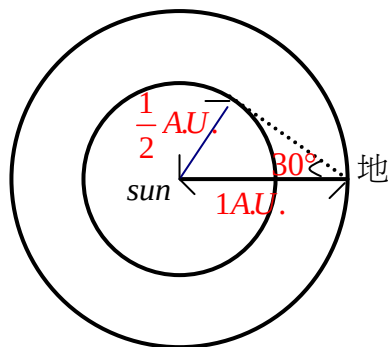


範例 14：

【解答】： $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

【解析】：

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{T^2} = 1, T = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



範例 15：

【解答】：1.(1) $\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ (2) $\frac{1}{2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ (3) $\frac{1}{2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ 2. $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

【解析】：1.

$$(1) \frac{T}{T_2} - \frac{T}{T_1} = 1 \Rightarrow T = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad T_1 = 30 \text{ 秒} \quad T_2 = 50 \text{ 秒} \quad T = 150 \text{ 秒}$$

1 跑 5 圈 2 跑 3 圈

$$(2) \frac{T}{T_2} - \frac{T}{T_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

$$2. \frac{T}{T_2} + \frac{T}{T_1} = 1 \Rightarrow T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

範例 16：

【解答】： $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

【解析】：

$$\frac{T}{T_2} + \frac{T}{T_1} = 1 \Rightarrow T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

範例 17：

【解答】：(略，見講義)

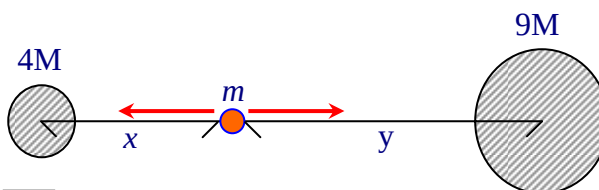
【解析】：(略，見講義)

範例 18：

【解答】：距 4M 物體 $\frac{2}{5}d$

【解析】：

$$\frac{G4Mm}{x^2} = \frac{G9Mm}{y^2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{4M}}{\sqrt{9M}} = \frac{2}{3}$$

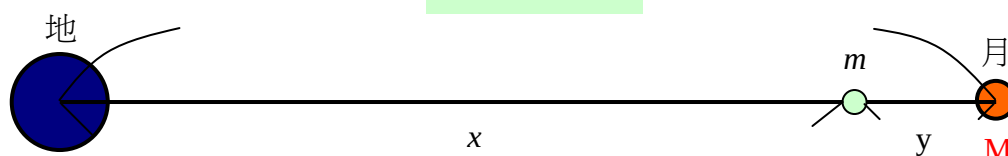


範例 19：

【解答】：(1)距地心 4640 公里(在地球內部) (2)與地心距 34.6 萬公里處。

【解析】：

38 萬 km



地球質量：月球質量=1：0.01223

(1)故質心位置：

$$\frac{0.01223}{1+0.01223} \times (3.84 \times 10^8) = 4.64 \times 10^6 \text{ m} = 4.64 \times 10^3 \text{ km} = 4640 \text{ km}$$

而地球半徑=6400 km 故月地質心在地球內部

$$(2) \text{引力}=0 \text{ 處，與地心距離} = \frac{1}{1+\sqrt{0.01223}} \times (3.84 \times 10^8) = 3.46 \times 10^8$$

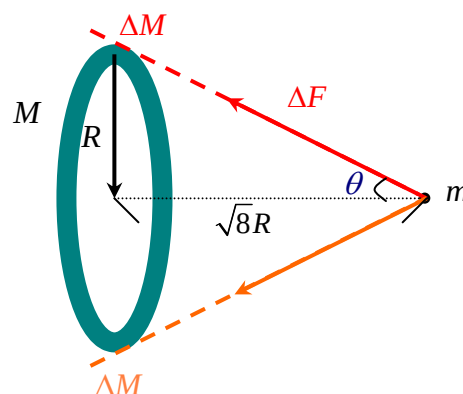
m=34.6 萬公里

範例 20：

【解答】： $\frac{\sqrt{8}}{27} \frac{GMm}{R^2}$

【解析】：

$$\begin{aligned} F &= \sum \Delta F \\ &= \sum \Delta F \cos \theta \\ &= \sum \frac{G(\Delta M)m}{(3R)^2} \times \frac{\sqrt{8}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{8}}{27} \frac{GMm}{R^2} \end{aligned}$$



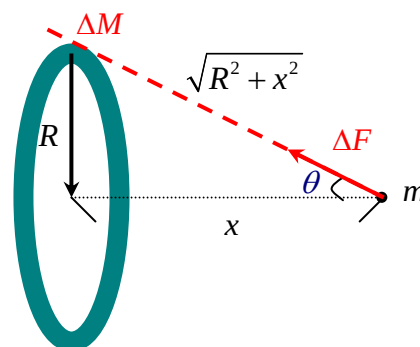
範例 21：

【解答】：(1) $\frac{GMm}{(\sqrt{x^2 + R^2})^3} x$ (2) S.H.M. (3) $2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

【解析】：

$$\begin{aligned} F &= \sum \Delta F = \sum \Delta F \cos \theta \\ &= \sum \frac{G(\Delta M)m}{(\sqrt{x^2 + R^2})^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \\ &= \frac{GMm}{(\sqrt{x^2 + R^2})^3} x \end{aligned}$$

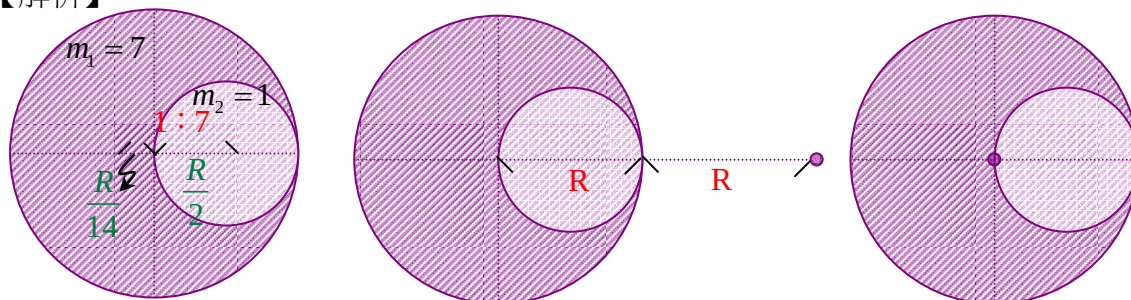
$$x \ll R \Rightarrow F \cong \frac{GMm}{R^3} x = kx \Rightarrow \text{SHM}$$



範例 22：

【解答】：(1)距原點右方 $R/14$ (2) $\frac{7}{36} \times \frac{GMm}{R^2}$ (3) $\frac{1}{2} \times \frac{GMm}{R^2}$ (4) $\frac{1}{2} \times \frac{GMm}{R^2}$

【解析】：



(1)質量比=1：7

距離比=7：1

$\Rightarrow (M \text{ 距原點正方}) = \frac{R}{14}$

(2) $F_{\text{大球對}m} = F_{\text{小球對}m} + F_{\text{剩餘對}m}$

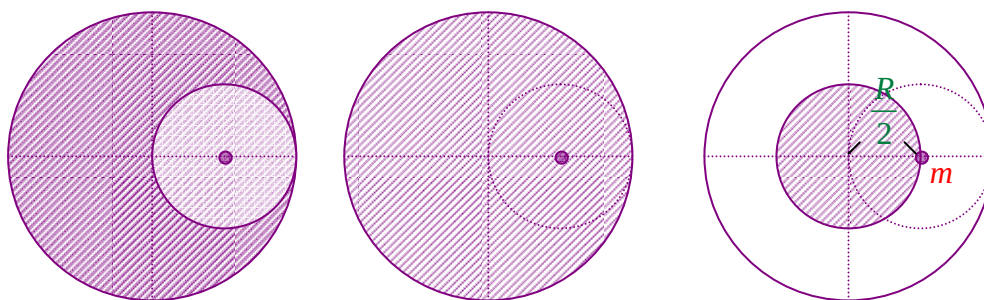
$$\Rightarrow \frac{GMm}{(2R)^2} = \frac{G(\frac{1}{8}M)m}{(\frac{3}{2}R)^2} + F_{\text{餘}}$$

$$F_{\text{餘}} = \frac{7}{36} \times \frac{GMm}{R^2}$$

(3) $F_{\text{大球}} = F_{\text{小球}} + F_{\text{剩餘}}$

$$\Rightarrow O = \frac{G(\frac{1}{8}M)m}{(\frac{R}{2})^2} = F_{\text{剩餘}}$$

$$F_{\text{餘}} = -\frac{1}{2} \times \frac{GMm}{R^2}$$



$$(4) \frac{G(\frac{1}{8}M)m}{(\frac{R}{2})^2}$$

範例 23：

【解答】： $\sqrt{2aR}$

【解析】：萬有引力提供向心力： $ma = m \frac{v^2}{2R} \Rightarrow v = \sqrt{2aR}$

※注意：距地高 R ，故軌道半徑= $2R$

範例 24：

【解答】：(A)

【解析】：

$$\frac{GMm}{(4r)^2} = m \frac{4\pi^2(4r)}{T^2}$$
$$\frac{G(\rho \frac{4}{3}\pi r^3)m}{(4r)^2} = m \frac{4\pi^2(4r)}{T^2}$$
$$\Rightarrow \rho = 192 \frac{\pi}{GT^2}$$

範例 25：

【解答】：R/9

【解析】：

$$\frac{R_{\text{同}}^3}{1^2} = \frac{R^3}{27^2} \Rightarrow R_{\text{同}} = \frac{R}{9}$$

範例 26：

【解答】：(C)(D)

【解析】：(A)角速度比為 2：1 錯 1：1
(B)軌道半徑比為 4：1 錯 2：1
(C)向心加速度之比為 2：1 對
(D)切線速率比為 2：1 對
(E)所受淨力比為 2：1 錯 1:1

範例 27：

【解答】：(B)(C)(E)

【解析】：

$$(A) \frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{27^2}{1^2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{9}{1}$$
$$(B) v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1/T_1}{R_2/T_2} = \frac{9/27}{1/1} = \frac{1}{3}$$
$$(C) a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1/T_1^2}{R_2/T_2^2} = \frac{9/27^2}{1/1} = \frac{1}{81}$$

(D) $F_c = ma_c$ 因為 m 未知，故 F 未知

$$(E) \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi R^2}{T} \Rightarrow \frac{\frac{\Delta A_1}{\Delta t}}{\frac{\Delta A_2}{\Delta t}} = \frac{R_1^2/T_1}{R_2^2/T_2} = \frac{9^2/27}{1^2/1} = \frac{3}{1}$$

範例 28：

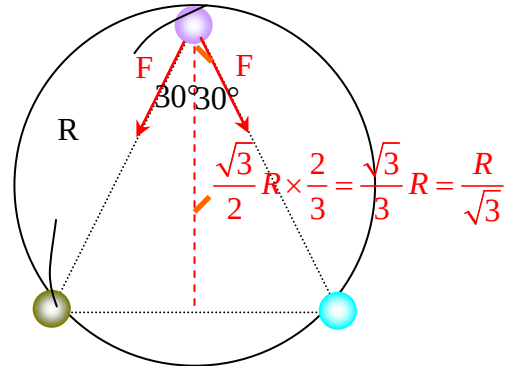
【解答】： $\sqrt{\frac{Gm}{R}}$

【解析】：

$$F \cos 30^\circ \times 2 = m \frac{v^2}{R'}$$

$$\frac{Gmm}{R^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = m \frac{v^2}{\frac{R}{\sqrt{3}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{R}}$$



範例 29：

【解答】：(D)

【解析】：

$$\frac{GMm}{R^3} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^4}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{R^2}{T} = \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2}}$$

範例 30：

【解答】：(D)

【解析】：

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \propto M$$

$$\frac{GMm}{R^n} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^{n+1}}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{R^2}{T} = k \Rightarrow \frac{R^4}{T^2} = k^2 \Rightarrow n = 3$$

範例 31：

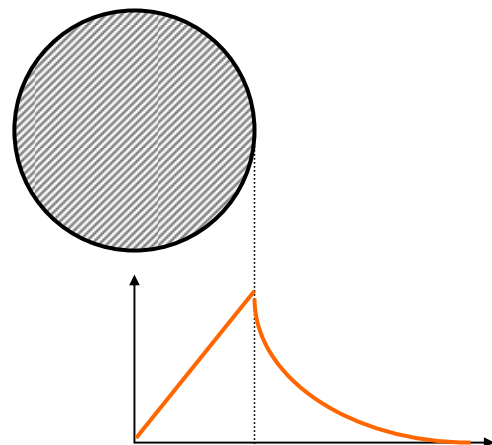
【解答】：9:8

【解析】：

$$g_{\frac{R}{2}} = \frac{1}{2} g$$

$$g_{\frac{3R}{2}} = \frac{4}{9} g$$

$$\frac{g_{\frac{R}{2}}}{g_{\frac{3R}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} g}{\frac{4}{9} g} = \frac{9}{8}$$



範例 32：

【解答】：1. (C) 2.384 kg

【解析】

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} = \frac{G(\rho V)}{R^2} = \frac{G(\rho \frac{4}{3} \pi R^3)}{R^2} \propto \rho R$$

1. $g' = 2g$

$$W' = 2W = 2 \times 64 = 128 \text{kgw}$$

2. $g' = 3 \times 2g = 6g$

$$\rightarrow W' = 6W = 6 \times 64 = 384 \text{kgw}$$

範例 33：

【解答】：(1)2 (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\sqrt{2}$ (5) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

【解析】：

$$1. g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} = \frac{G(\rho V)}{R^2} = \frac{G(\rho \frac{4}{3} \pi R^3)}{R^2} \propto \rho R, g' = 2$$

$$2. T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$3. t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

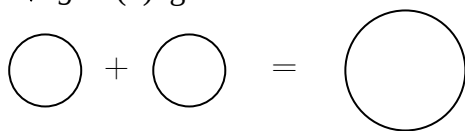
$$4. v = \sqrt{2gH}$$

$$5. T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

範例 34：

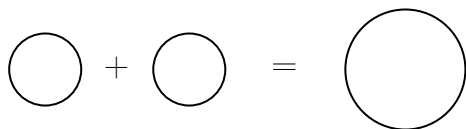
【解答】：(1) $\sqrt[3]{2}g$ (2)2g

【解析】：



M	M	2M
V	V	2V
R	R	$\sqrt[3]{2} R$

$$g' = \frac{G(2M)}{(\sqrt[3]{2}R)^2} = \sqrt[3]{2} \frac{GM}{R^2} = \sqrt[3]{2}g \quad 2 = (\sqrt[3]{2})^3$$



$$\begin{array}{ccc} M & M & 2M \\ V & V & 2V \\ R & R & \sqrt[3]{2} R \end{array}$$

$$g' = \frac{G(2M)}{R^2} = 2 \frac{GM}{R^2} = 2g$$

範例 35：

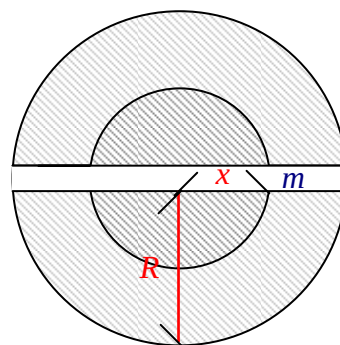
【解答】：(1) (略) (2)84 分鐘 (3)84 分鐘

【解析】：

$$(1) F = \frac{GM'm}{x^2} = \frac{G(\frac{x}{R})^3 Mm}{x^2} = \frac{GMm}{R^3} x = kx \Rightarrow \text{SHM!}$$

$$(2) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 84 \text{ min.}$$

$$(3) \frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 84 \text{ min.}$$



範例 36：

【解答】：(A)

【解析】：地心處 $g=0$ ，失重 $N=0$

範例 37：

【解答】：(D)

【解析】：在等速率圓周運動的軌道上，失重 $N=0$

範例 38：

【解答】：1. 0 2. 120kgw 3. 30kgw

【解析】：1. $g'=g-a=g-g=0$

$$2. g'=g+a=2g \quad W'=120\text{kgw}$$

$$3. g'=g-a=g-g/2=g/2 \quad W'=30\text{kgw}$$