

第五章 動量守恆定律；衝量

P.4

050104 質心座標系

【出發點】：質心速度的公式

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

【推導】：

$$m_1 v_c + m_2 v_c = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 (v_1 - v_c) + m_2 (v_2 - v_c) = 0$$

$$m_1 \vec{v}_{1c} + m_2 \vec{v}_{2c} = 0$$

$$\vec{P}_{1c} - \vec{P}_{2c} = 0$$

結 論：系統相對於質心的總動量=0[站在質心看，動量守恆]即使受外力，此式仍然成立。

應 用：第七章 推導「內動能」時會用到此結果

【推廣】： $m_1 \vec{x}_{1c} + m_2 \vec{x}_{2c} = 0$

若 CM 不動 $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = 0$

P.13

050203 動量守恆定律(Conservation of Momentum、動量守恆定律。運(うん)動(どう)量(りょう)保(ほ)存(ぞん)の法(ほう)則(そく))一系統當所受外力和=0，系統的動量守恆

【證明】：

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

【定律成立的前提】：

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \vec{P} = \text{常數} \Rightarrow \text{動量守恆定律}$$

P.19

050213 爆炸問題總整理

➡ 1、爆炸問題的動量守恆：

☞☞(1)炸彈在空中爆炸受不受外力？ 受重力(mg)

☞☞(2)爆炸問題，動量守不守恆？ 守恆

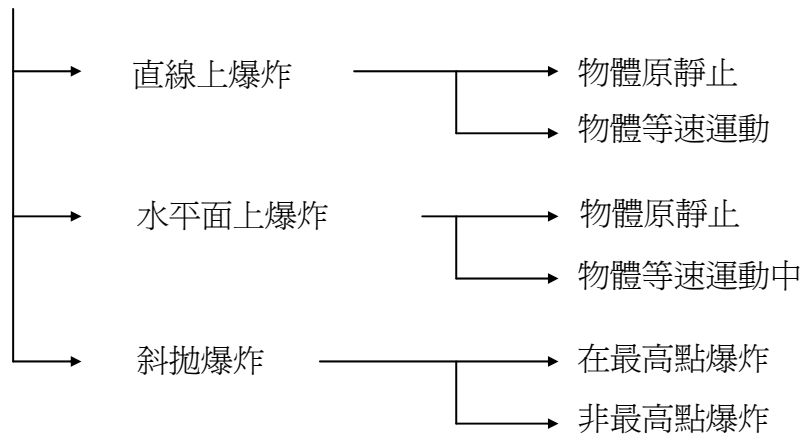
☞☞ 我們的假設： $\Delta t = 0 \Rightarrow$ 爆炸瞬間前後動量守恆 $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \Delta P = F \times \Delta t$

🌀🌀🌀 (若受外力情況下，只有 $\Delta t = 0$ 才有可能動量守恆)

➡2、爆炸的力學能守不守恆? 不守恆

🌀🌀 為什麼? 釋放化學能

➡3、爆炸的分類：



P.24

050301  **衝量**

➡2.衝量的推導： $\vec{J} = \vec{F}\Delta t = m\vec{a}\Delta t = m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{P}$

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \cdot \Delta t = \Delta\vec{P}$$

【馬上挑戰】：下列那些物理量與衝量同方向？

(A)速度 (B)速度變化 (C)力 (D)加速度 (E)加速度變化 (F)動量變化
(G)動量

【解答】：(B)(C)(D)(F)

$$\Delta\vec{v} \neq \vec{v}$$

$$\Delta\vec{P} \neq \vec{P}$$

第五章 詳解

範例 01

【解答】：(B)(D)

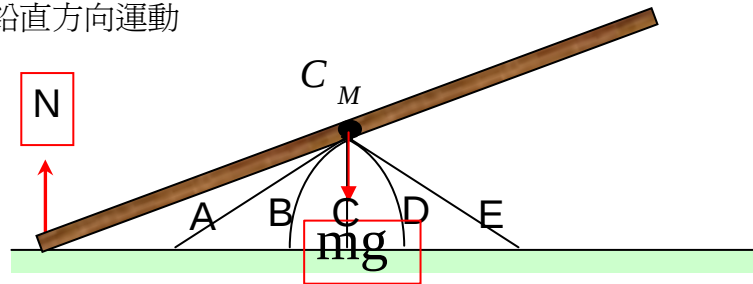
【解析】：(C)質心之加速度 $= g$ ，但第三環之 a 不一定 $= g$ 。

範例 02

【解答】：(C)

【解析】： C_M 只受鉛直外力， $V_0 = 0 \rightarrow C_M$ 只在鉛直方向運動

$\therefore$ 當木棒往下掉時，木棒左端後滑



範例 03

【解答】： $V_c = \frac{1}{2}v$

【解析】：

$$V_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{mv + m \times 0}{2m} = \frac{1}{2}v$$

其後系統向右運動，且在 C_M 看時系統作 SHM

範例 04

【解析】：

$$(1) \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 g \text{ 向下}$$

$$a = \frac{M_g - m_g}{M+m} = \frac{M-m}{M+m} g$$

$$a_c = \frac{M(-a) + ma}{M+m} = -\frac{M-m}{M+m} a = -\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 g \text{ (加權平均)}$$

$$(2) \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 g t \text{ (向下)}$$

$$V_c = \frac{M(-at) + m(at)}{M+m} = -\frac{M-m}{M+m} at = a_c t$$

$$(3) \frac{1}{2} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 g t^2 \text{ 向下}$$

範例 05

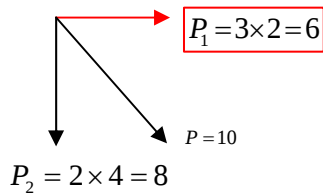
【解答】：2 m/s

【解析】：

$$\begin{cases} V_{cx} = \frac{3 \times 2 + 2 \times 0}{3 + 2} = \frac{6}{5} \\ V_{cy} = \frac{3 \times 0 + 2 \times (-4)}{3 + 2} = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_c = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2}$$

【另解】 $P = 10 = (3 + 2)V_c \Rightarrow V_c = 2$



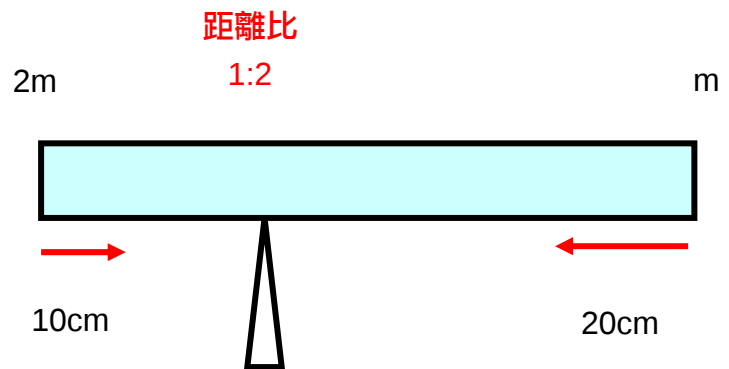
範例 06

【解答】：20cm

【解析】：

$$\begin{cases} m_1 x_1 = m_2 x_2 \\ m_1 \Delta x_1 = m_2 \Delta x_2 \end{cases}$$

(移動之距離與質量成反比)



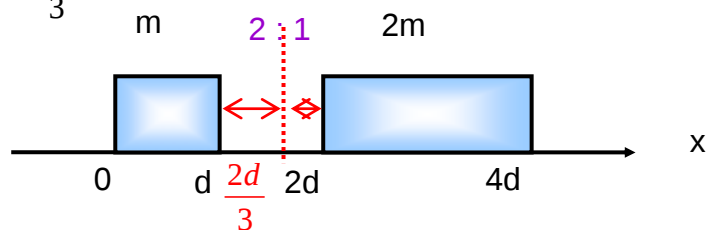
範例 07

【解答】：(D)

【解析】：

磁力 $\in$ 內力 $\Rightarrow$ 不受外力影響， C_M 不動(碰撞點不一定會位於 C_M)

$$\text{撞擊點} = d + \frac{2}{3}d = \frac{5}{3}d$$



範例 08

【解答】：(1) $\frac{M}{M+m}L$ (2) $\frac{m}{M+m}L$

【解析】：質心系統

【標準解法】：系統不受外力(人與車之作用力為內力)，故系統的質心不動[原來系統的質心座標]
=[後來系統的質心座標]

$$\frac{M \cdot (x + \frac{L}{2}) + m \cdot x}{M+m} = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + m \cdot L}{M+m}$$

人前向走，車給人一向前之摩擦力，則反作用力，使車向後退

$$\Rightarrow (M+m)x = mL$$

$$x_{\text{車}} = \frac{m}{M+m}L$$

$$x_{\text{人}} = L - x = \frac{M}{M+m}L$$

【解法<二>】：

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

&

$$x'_{cm} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}$$

【解法<三>】：

$$m_1 \Delta x_1 = m_2 \Delta x_2$$

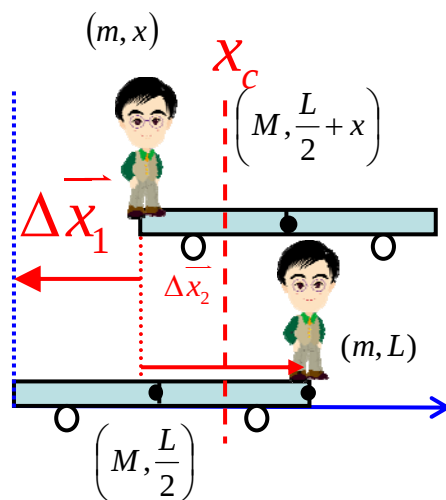
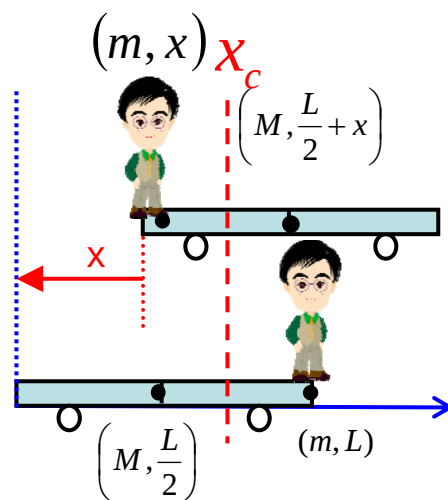
$$\Delta \bar{x}_1 - \Delta \bar{x}_2 = L \Rightarrow \Delta x_1 + \Delta x_2 = L$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (\text{移動距離與質量成反比})$$

$$\Delta x = \frac{\text{別}}{\text{自} + \text{別}} \times \text{水平相對位移}$$

1.鉛直方向不受力， C_M 只在水平方向移動

2.和分比

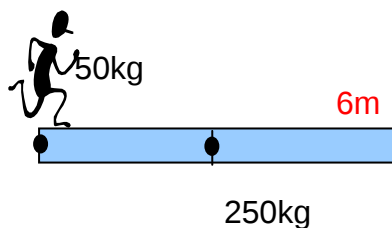


範例 09

【解答】：1m

【解析】：

$$\Delta x = \frac{50}{300} \times 6 = 1m$$



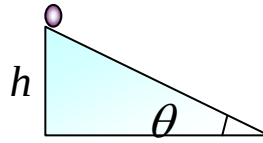
範例 10

【解答】： $\frac{m}{M+m} h \cot \theta$

【解析】：

$$\Delta x = \frac{m}{M+m} h \cot \theta$$

球向下滾，斜面向左滑



範例 11

【解答】：(B)

【解析】：

別
自+別 相對位移

$$\begin{cases} \Delta x_{\text{碗}} = \frac{m}{M+m} R \\ \Delta y_{\text{碗}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta r_{\text{碗}} = \Delta x_{\text{碗}} = \frac{m}{M+m} R$$

$$\begin{cases} \Delta x_{\text{球}} = \frac{M}{M+m} R \\ \Delta y_{\text{球}} = -R \end{cases} \Rightarrow \Delta r_{\text{球}} = \sqrt{\Delta x_{\text{球}}^2 + \Delta y_{\text{球}}^2}$$

若球與碗之間有摩擦力存在，則以下答案均不變($f \in$ 內力)，但 U 下滑，t 會改變。

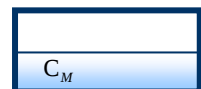
$$\begin{cases} \Delta x_c = 0 \Rightarrow \text{此題即以此式列式。} \\ \Delta y_c = \frac{M \times 0 + m \times (-R)}{M+m} = \Delta r_c \end{cases}$$

範例 12

【解答】： $\frac{mL}{4(M+m)}$

【解析】：水向右流，容器向左移動

$$\Delta x = \frac{m}{M+m} \times \frac{L}{4}$$



範例 13

【解答】：(1) 2 m (2) 1 m

【解析】：

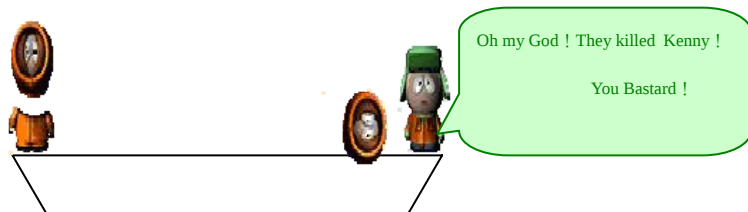
(1)之【解法<一>----禮讓法】：

$$\text{Kenny} \longrightarrow \text{船} \longleftarrow \Delta x_1 = \frac{60}{300} \times 30 = 6 \leftarrow$$

$$\text{Kyle} \longleftarrow \text{船} \longrightarrow \Delta x_2 = \frac{40}{300} \times 30 = 4 \rightarrow$$

$$\Delta x = 6 - 4 = 2 \leftarrow$$

(1)之【解法<二>----阿尼砍頭法】：



$$\Delta x = \frac{20}{300} \times 30 = 2$$

視為 40 公斤不動，真正影響質心的只有 20 公斤

(2) Kyle 走到中點，Kenny 的身體走到中點 質心不動

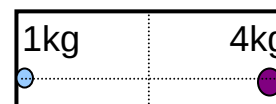
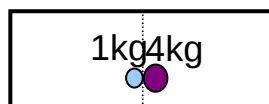
$$\text{只有阿尼的頭對質心有影響 } \Delta x = \frac{20}{300} \times 15 = 1$$

範例 14

【解答】：3.6 m

【解析】：

$$\Delta x = \frac{3}{5+1+4} \times 12 = 3.6m$$



系統中只有 3kg 有影響，且 3kg 移動了 12m

範例 15

【解答】： $\frac{26}{15}m$

【解析】：

$$\Delta x = \frac{-30 \times 3 + 70 \times 5}{30 + 70 + 50} = \frac{26}{15}$$

範例 16

【解答】： $\frac{m}{m+M}v$

【解析】：(1)

$$mv + M \times 0 = (m + M)v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{m}{m+M}v$$

(2)

$$mv + M \times 0 = (m + M)v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{m}{m+M}v$$

範例 17

【解答】：(B)

【解析】：具最大壓縮量時 $\Rightarrow v_1 = v_2 = v_c$

$$2 \times 5 + 3 \times 0 = (2 + 3)v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}$$

範例 18

【解答】：1.5 m/s

【解析】：

$$\begin{cases} (55 + 5 + 20) \times 2 = 5 \times V_{\text{球}} + (55 + 20)V_{\text{人}} \\ V_{\text{球}} - V_{\text{人}} = 8 \quad (\text{球相對於人而言}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 160 = 5(8 + V_{\text{人}}) + 75V_{\text{人}}$$

$$\therefore V_{\text{人}} = 1.5 \text{ m/s}$$

$$V_{\text{球}} = 8 + 1.5 = 9.5 \text{ m/s}$$

範例 19

【解答】：(a) $\frac{m_0 \vec{v}_0}{M + 2m}$ (b) $\frac{2m_0 \vec{v}_0}{M + 2m + m_0}$

【解析】：原來總動量 = 後來總動量

$$0 = m_0 \vec{v}_0 + m_0(-2\vec{v}_0) + (M + m + m_0)\vec{v}_1$$

$$\therefore \vec{v}_1 = \frac{m_0 \vec{v}_0}{M + 2m}$$

(b)

$$0 = m_0(-2\vec{v}_0) + (M + m + m + m_0)\vec{v}_2$$
$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{2m_0\vec{v}_0}{M + 2m + m_0}$$

範例 20

【解析】：(1) 8 m/s (2) -7 m/s (3) -1 m/s

(1)

$$(20 + 60) \times 2 = 60V_{\text{人}} + 20V_{\text{車}}$$

$$V_{\text{人}} = 0 \Rightarrow 160 = 20V_{\text{車}}$$

$$\therefore V_{\text{車}} = 8 \text{ m/s}$$

(2)

$$\begin{cases} (20 + 60) \times 2 = 60V_{\text{人}} + 20V_{\text{車}} \\ V_{\text{人}} - 2 = 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 160 = 60 \times 5 + 20V_{\text{車}}$$
$$\therefore V_{\text{車}} = -7 \text{ m/s}$$

(3)

$$\begin{cases} (20 + 60) \times 2 = 60V_{\text{人}} + 20V_{\text{車}} \\ V_{\text{人}} - V_{\text{車}} = 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow V_{\text{車}} = -1 \text{ m/s}$$
$$V_{\text{人}} = 3 \text{ m/s}$$

範例 21

【解答】：(A)

【解析】：

$$\begin{cases} 0 = mv_{\text{人}} + mv_{\text{船}} \\ v_{\text{人}} - v_{\text{船}} = v \end{cases}$$
$$\Rightarrow 0 = m(v_{\text{船}} + v) + mv_{\text{船}}$$
$$\therefore v_{\text{船}} = -\frac{m}{M + m}v$$

範例 22

【解答】：1. $\frac{2}{5}v$ 2. (1) $-\frac{13}{42}v$ (2) $-\frac{2}{7}v$

【解析】：

1. ①

甲先跳

$$0 = mv + 6mv_{\text{車}}$$

$$\therefore v_{\text{車}} = -\frac{1}{6}v$$

②

乙再跳

$$6m\left(-\frac{1}{6}\right)v = mv + 5mv'_{\text{車}} \quad \therefore v'_{\text{車}} = \frac{2}{5}v$$

若甲乙同時跳，則與分別對地皆為 v 跳車之結果相同。

$$0 = 2mv + 5mv''_{\text{車}}$$

$$\therefore v''_{\text{車}} = \frac{2}{5}v$$

2.

①

甲先跳

$$\begin{cases} 0 = mv_{\text{甲}} + (5m + m)v_{\text{車}} \\ v_{\text{甲}} - v_{\text{車}} = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = m(v_{\text{車}} + v) + 6mv_{\text{車}}$$

$$\therefore v_{\text{車}} = -\frac{1}{7}v$$

②

乙再跳

$$\begin{cases} (5m + m)\left(-\frac{1}{7}v\right) = mv_{\text{乙}} + 5mv'_{\text{車}} \\ v_{\text{乙}} - v'_{\text{車}} = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{7}mv = m(v'_{\text{車}} + v) + 5mv'_{\text{車}}$$

$$\therefore v'_{\text{車}} = -\frac{13}{42}v$$

若甲乙同時跳

$$\begin{cases} 0 = (m + m)v_{\text{人}} + 5mv_{\text{車}} \\ v_{\text{人}} - v_{\text{車}} = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = 2m(v_{\text{車}} + v) + 5mv_{\text{車}} - 10 -$$

$$\therefore v_{\text{車}} = -\frac{2}{7}v$$

範例 23

【解答】：(1) $\frac{Mv}{M+m}$ (2) $\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$ (3) $\frac{Mv}{M+m}$

【解析】：

(1). $v_{cx} = \frac{M \times v + m \times 0}{M+m}$ (磚塊無水平方向速度)

(2). $v_{cy} = \frac{M \times 0 + m \times \sqrt{2gh}}{M+m}$ (臺車無鉛直方向速度)

(3). 磚塊落於臺車後

$$\Rightarrow M \times v + m \times 0 = (M+m)v'$$

$$\therefore v' = \frac{M}{M+m}v = v_{cx}$$

鉛直將磚塊拉離後，磚塊乃具水平

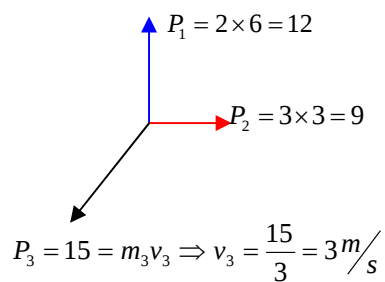
$$v = \frac{M}{M+m}v \quad (\text{沒有把 } P \text{ 還給臺車})$$

$$\therefore \text{臺車仍為 } v' = \frac{M}{M+m}v$$

範例 24

【解答】：3 m/s

【解析】：



$$P_1 = 2 \times 6 = 12$$

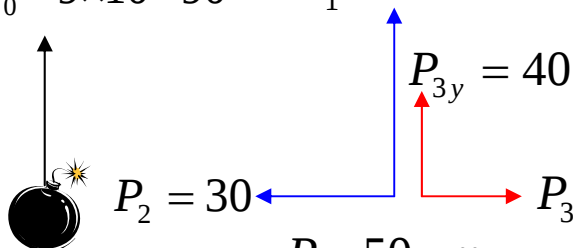
$$P_2 = 3 \times 3 = 9$$

$$P_3 = 15 = m_3 v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{15}{3} = 3 \text{ m/s}$$

範例 25

【解答】：12.5m/s

【解析】：

$$P_0 = 9 \times 10 = 90 \quad P_1 = 2 \times 25 = 50$$


$$P_2 = 30 \quad P_{3y} = 40 \quad P_{3x} = 30$$

$$P_3 = 50 = m_3 v_3$$

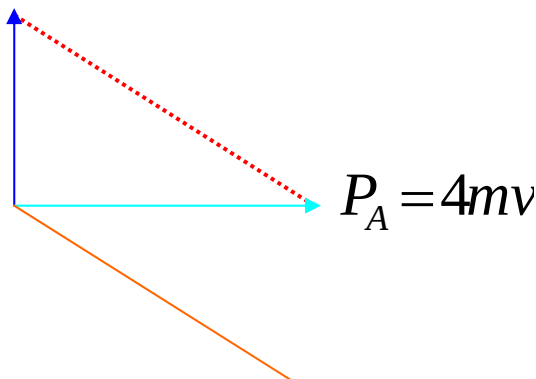
$$\therefore v_3 = 12.5 \text{ m/s}$$

範例 26

【解答】: $\frac{5}{3}v$

【解析】:

$$P_B = 3mv$$



$$P_A = 4mv$$

$$P_C = 5mv = 3m \times v_c$$

$$\therefore v_c = \frac{5}{3}v$$

範例 27

【解答】: (A)(B)(E)

【解析】: (B)爆炸為系統內力，在任一破片未著地前只受重力。

(D)爆炸後動能較大，有化學能釋放。

範例 28

【解答】: (B)

【解析】:

$$\text{質心 } 10 \text{ 秒後下落 } S = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490$$

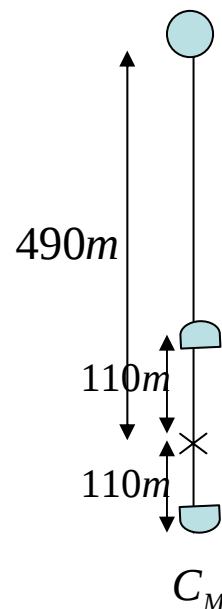
$$\Rightarrow \text{另一碎片距地 } 110 \times 2 = 220m$$

其一著地後若黏住不反彈，則

$$\text{質心 } a = \frac{1}{2}g$$

若著地後反彈， $N \uparrow$

有可能質心向上運動



範例 29

【解答】：(A)

【解析】：

$$mv_0 \cos \theta = \frac{3}{5}mv_0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}, \theta = 53^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

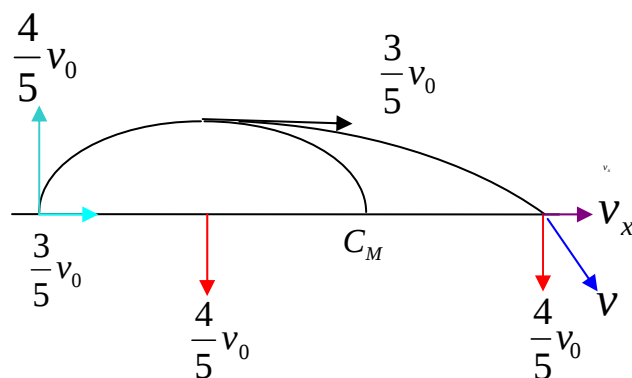
$$P = \frac{m}{2} \times \frac{4}{5}v_0 = \frac{2}{5}mv_0$$

爆炸前後瞬間

$$\Rightarrow mv_0 \cos \theta = \frac{m}{2} \times 0 + \frac{m}{2} \times v_x$$

$$\therefore v_x = \frac{6}{5}v_0$$

$$v = \frac{2\sqrt{13}}{5}v_0$$



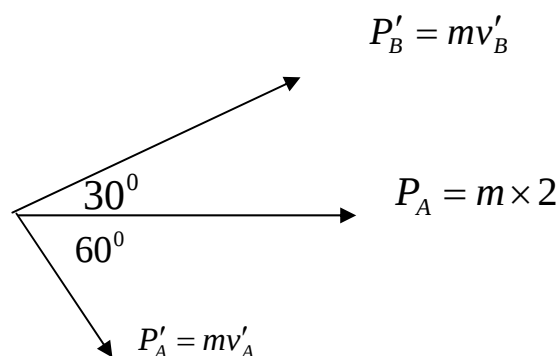
範例 30

【解答】：A: 1m/s B: $\sqrt{3}$

【解析】：當 m 相同時， P 之圖解等於 v 之圖解

$$\Rightarrow v'_B = \sqrt{3}$$

$$v'_A = 1$$



範例 31

【解答】：(E)

【解析】： $J = \Delta P = F \times t \Rightarrow Ft = P$

$$(A) mat = mv$$

$$(C) Ft = P \Rightarrow t \propto \frac{1}{F}$$

$$(D) Ft = P \Rightarrow t \propto P$$

範例 32

【解答】：(1) $mV_0 \sin \theta$ (2) $2mV_0 \sin \theta$

【解析】：

(1)

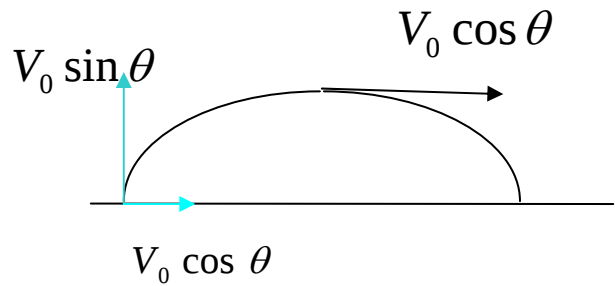
$$\textcircled{1} \quad J = \Delta P = F\Delta t = mg \times \frac{V_0 \sin \theta}{g}$$

$$\textcircled{2} \quad J = \Delta P = m\Delta V_y = mV_0 \sin \theta$$

(2)

$$\textcircled{1} \quad J = \Delta P = F\Delta t = mg \times \frac{2V_0 \sin \theta}{g}$$

$$\textcircled{2} \quad J = \Delta P = m\Delta V_y = m \times 2V_0 \sin \theta$$



範例 33

【解答】：(1) 11m/s (2) 16m/s (3) -6m/s (4) $\sqrt{5^2 + 11^2}$

【解析】：

$$J = \Delta P = \frac{4+7}{2} \times 10 = 55$$

$$\Rightarrow \Delta P = m\Delta V = 5 \times \Delta V = 55$$

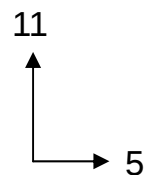
$$\therefore \Delta V = 11$$

$$(1) V = V_0 + 11 = 0 + 11 = 11 \text{ m/s}$$

$$(2) F \text{ 與 } V_0 \text{ 同向} : V = 5 + 11 = 16 \text{ m/s}$$

$$(3) F \text{ 與 } V_0 \text{ 反向} : V = 5 - 11 = -6 \text{ m/s}$$

$$(4) v = \sqrt{5^2 + 11^2}$$



範例 34

【解答】： Nmv

【解析】：

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} (\text{看一秒}) \Rightarrow F = \frac{nMV}{1} = nMV$$

如何讓後座力變小？

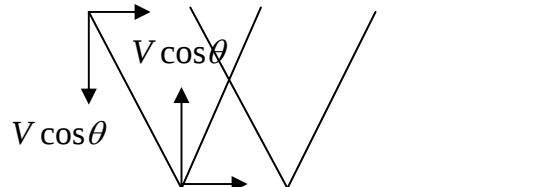
$$F = nMV, \text{ 使 } M \downarrow \text{ 或 } V \downarrow$$

範例 35

【解答】： $2\mu V \cos \theta$

【解析】：

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} (\text{看一秒}) \Rightarrow F = \frac{\mu 2V \cos \theta}{1}$$



$V \sin \theta$

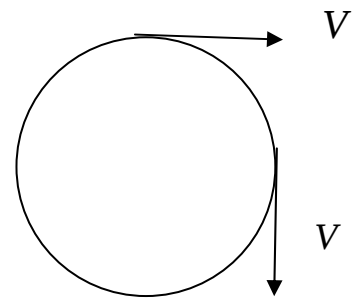
範例 36

【解答】： (1) $F_c = mR\omega^2$ (2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} mR\omega^2$

【解析】： (1) $F_c = mR\omega^2$

$$(2) J = \Delta P = m\Delta V = m\sqrt{2}V$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\sqrt{2}V}{\frac{1}{4}T} = \frac{4\sqrt{2}m(R\omega)}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} mR\omega^2$$



範例 37

【解答】： $mv \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

【解析】：

$$(1) 360^\circ \rightarrow T$$

$$30^\circ \rightarrow \frac{T}{12}$$

$$(2) a_x = \frac{1}{2}a$$

$$V_x = \frac{\sqrt{3}}{2}V$$

$$(3) J = \Delta P = m\Delta V = m \left(V - \frac{\sqrt{3}}{2}V \right)$$

