第四章 質量與牛頓運動定律

P.2

040102 加利略的實驗（二）→斜面的等高性

觀 察：物體在兩斜面上的滑動，會回到原高度

推 論：若滑至平面上，因永遠達不到同高度，故運動永不停止

→ 動者恆動(等速度)

040103 加利略的實驗（三）→單擺的等高性

觀 察：擺錘仍然升到它最初的水平面

推 論：若繩子無限長，因永遠達不到同高度，故運動永不停止

→ 動者恆動(等速度)

P.3

2. 在最高點，受__重_力

慣性定律的關鍵字：___恆_____

P.13

重力加速度沿斜面分量：$a_T = g\sin\theta$

重力加速度垂直斜面分量：$a_N = g\cos\theta$

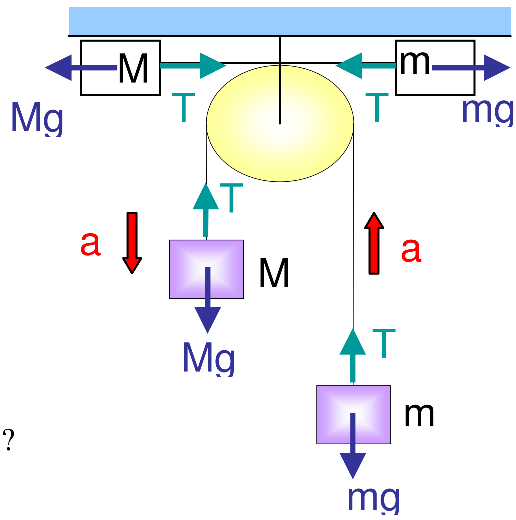
P.14

【實驗目的】：探討 F、m、a 之關係

----___F=ma___

P.17

040220 定滑輪之力學分析：



$$Mg - T = Ma$$

$$+)\ T - mg = ma$$

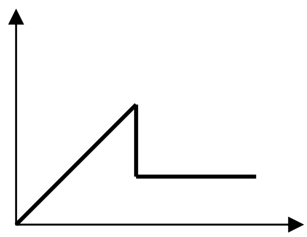
$$Mg - mg = (M+m)a$$

$(\sum P = \sum m a)$

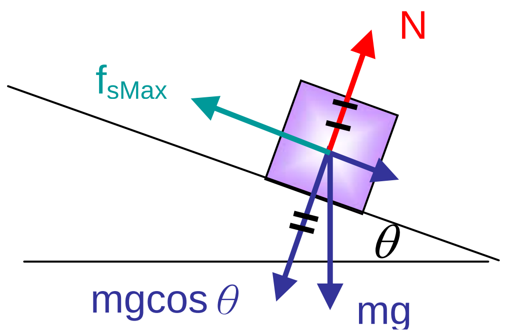
- 列方程式的關鍵: 列 mg-T=ma 或 T-mg=ma ?
- 定滑輪的作用在於改變受力的方向

⇒扭曲受力的方向

040241 靜摩擦力與動摩擦力

	靜摩擦力	動摩擦力
意　　義	物體不動，抵抗外力，摩擦面施予物體的力	物體滑動時，摩擦面施予物體的力
方　　向	與運動趨勢相反	與運動方向相反
力的大小	變力，存在最大值	定力，與速度無關
公　　式	$f_{sMax} = \mu_s N$ $f_s \le \mu_s N$	$f_k = \mu_k N$
性質(1)	μ_s 只跟接觸面的性質有關，跟正向力、接觸面積無關	μ_k 只跟接觸面的性質有關，跟速度、正向力、接觸面積無關
性質(2)	$0 \leqq \mu_s < \infty$，但通常＜1	$0 \leqq \mu_k < \infty$，但通常＜1； $\mu_s > \mu_k$
性質(3)	μ_s 沒有單位	μ_k 沒有單位
圖　　示		

040242 μ_s 的測定法

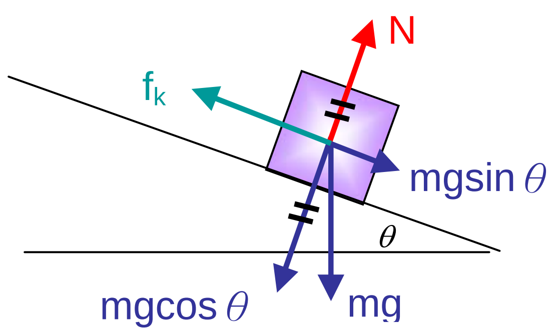


$$\cancel{mg}\sin\theta = f_{s\ \max} = \mu_s N = \mu_s \cancel{mg}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta_s$$

解題關鍵：恰下滑

μ_k 的測定法



$$\cancel{mg}\sin\theta = f_k = \mu_k N = \mu_k \cancel{mg}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta_k$$

解題關鍵：等速下滑

P.35

向心力的三種形式：

	公　　式	用　　途
1	$F_c = ma_c = m\dfrac{v^2}{R}$	求速率
2	$F_c = ma_c = m\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$	求週期
3	$F_c = ma_c = mR\omega^2$	求角速度

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

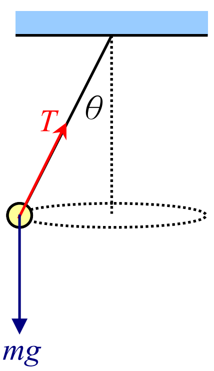
$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = R\omega^2$$

$$= v\omega = \frac{2\pi v}{T} = \frac{2\pi R\omega}{T}$$

P..39

040259 **錐動擺：**

錐動擺的構造，本質上即爲一單擺，只不過不是做來回的擺動，而是使之轉動，其運動所涵蓋的空間，像是一錐體，故名錐動擺。



鉛直：$T\cos\theta = mg$

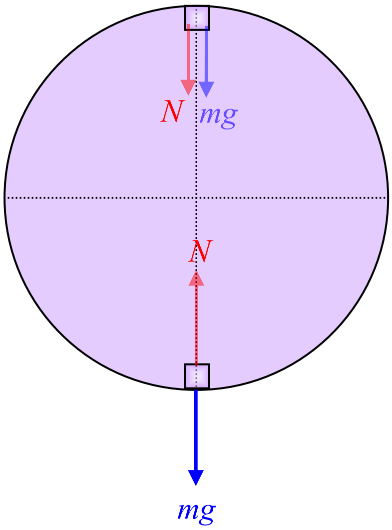
水平：$T\sin\theta = F_c \Rightarrow$ 提供向心力

$$F_c = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} = mRW^2$$

$$R = L\sin\theta$$

鉛直面圓周運動之重要數據

我們要求，『鉛直面圓周運動』在最高點與最低的最小速率爲何?



最高點

$$\cancelto{0}{N} + mg = F_c = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{gR}}$$

最低點：（增加的 E_k ＝減少的 U_g ）

$$\frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}m(\sqrt{gR})^2 = mg2R$$

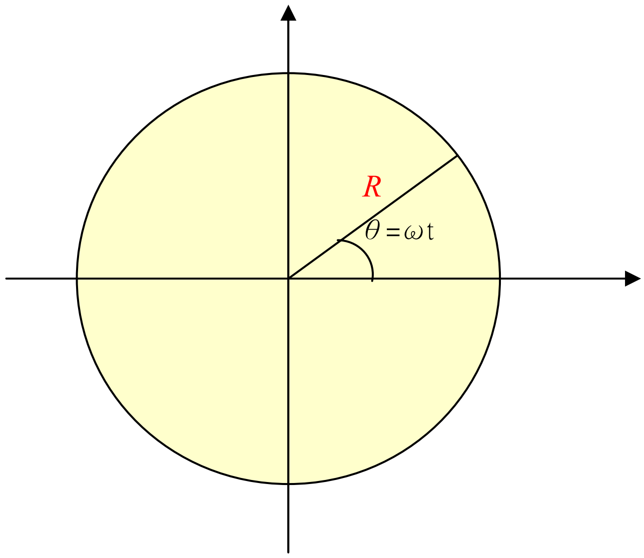
$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{5gR}}$$

＊最低點與最高點相差 $\sqrt{4gR}$

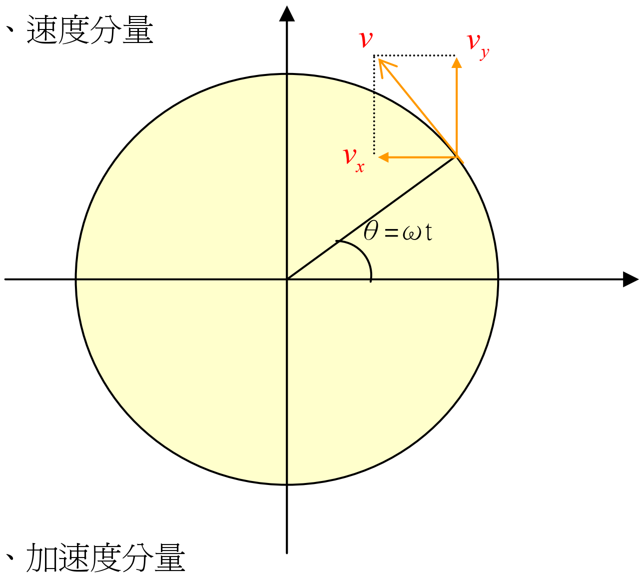
040271 SHM 完全攻略(1)--等速率圓周運動投影法：

1、位置向量

$x = R\cos\theta = R\cos\omega t$



2、速度分量



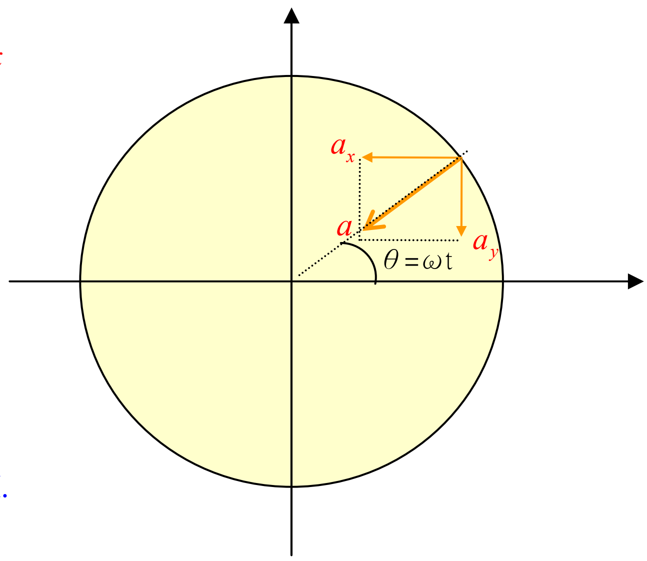
$v_x = -v\sin\theta = -\omega R\sin\omega t$

3、加速度分量

$a_x = -a\cos\theta = -\omega^2 R\cos\omega t = -\omega^2 x$

$\Rightarrow F_x = ma_x = -(m\omega^2)x = -kx$

$\sim Wow!\quad S.H.M.!$



＊等速率圓周運動之投影=S.H.M.

P.55

040272 **SHM 週期之推導：**

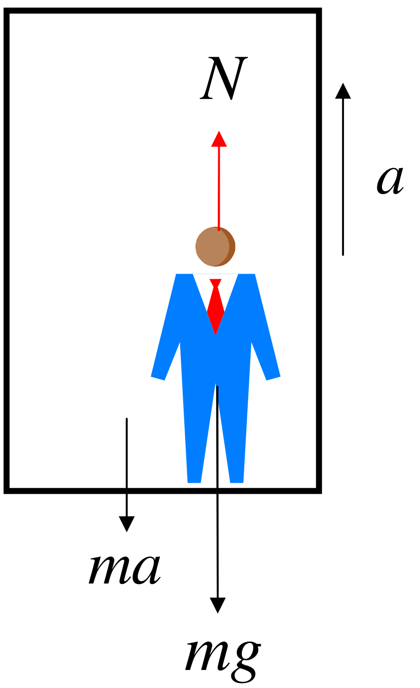
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\text{（與 }R\text{、}g\text{ 無關）}$$

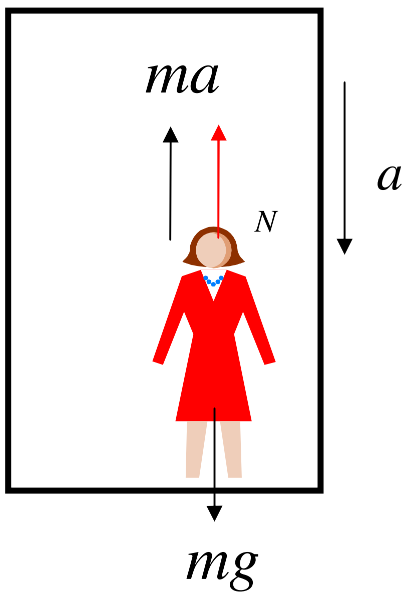
$$\left[F_x=ma_x=-m\omega^2x=-kx\Rightarrow k=m\omega^2\quad\therefore\omega^2=\frac{k}{m}\right]$$

P.62

040297 **「等效重力場」（或稱「視加速度」）：**

在一等加速度上升或等加速度下降的電梯中，如果觀察者隨電梯一起運動，則須引入假想力此修正項。此觀察者看到的世界都受重力及假想力，因爲這兩個力都是定力，故可把這兩個力的合力，視爲新的重力，此合力之加速度，我們稱爲等效重力場，或稱視加速度。





$N-mg=ma$

$\Rightarrow N=mg+ma=mg'$

$\therefore g'=g+a$ 等效重力場

$mg-N=ma$

$\Rightarrow N+ma=mg$

$g'=g-a$ 等效重力場

*若a=g $\Rightarrow g'=0$ *Wow* 失重!

第四章 詳 解

範例 01：

【解析】：車子保有向北之慣性，無論向哪轉乘客皆會往北傾。

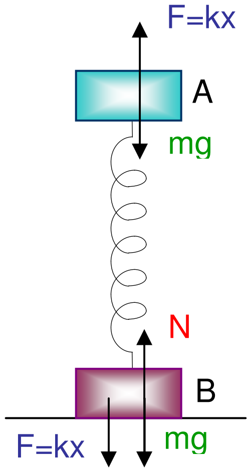
解析：何謂「慣性」？ 物體保有原來運動狀態的特性。

舉一反三：車子在啓動時，人會向__後__傾；

車子在煞車時，人會向__前__傾。

範例 02：

【解析】：抽去平板之瞬間，N 消失。



$$a_A = 0$$

$$a_B = \frac{\sum F}{2m} = \frac{2mg + kx}{2m} = \frac{2mg + mg}{2m} = \frac{3}{2}g$$

範例 03：

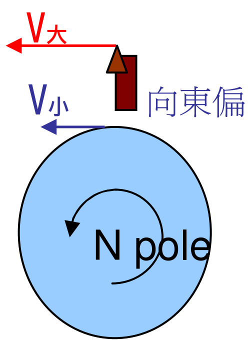
【解析】：(1)原處(2)後方(3)前方

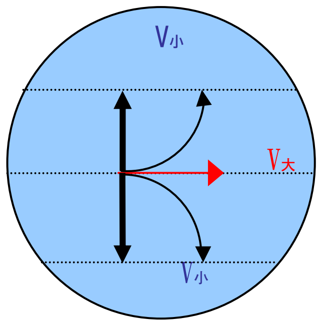
範例 04：

【解析】：進階思考：科氏力，北半球向_右；南半球向左_。

範例 05：

【解析】：

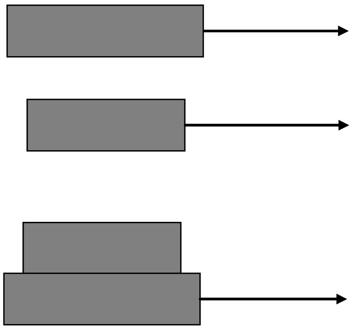




$$a_1 = \frac{F}{m_1}$$

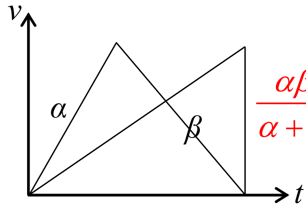
$$a_2 = \frac{F}{m_2}$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F}{\frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$ (等效加速度)



$a_1 = \dfrac{F}{m_1}$

$a_2 = \dfrac{F}{m_2}$



$\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

$a = \dfrac{F}{m_1+m_2} = \dfrac{F}{\dfrac{F}{a_1}+\dfrac{F}{a_2}} = \dfrac{a_1 a_2}{a_1+a_2}$ （等效加速度）

範例 06：

【解析】：

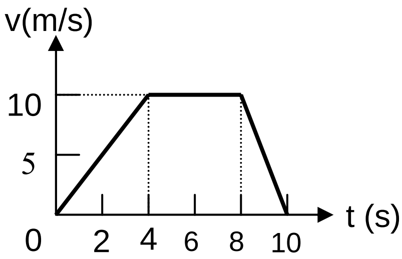
$$B - 2mg = 2ma$$
$$6mg - B = 6ma$$
$$\therefore a = \frac{1}{2}g$$
$$B = 3mg$$
$$A:3\text{包}$$

範例 07：

【解析】：從 v-t 圖可得 a(a 是 v-t 圖的斜率)，從 a 可得 F (F=ma)。

(1) 0~4 秒間

$$F_{0\sim4} = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0.1\times\frac{10-0}{4-0} = 0.25$$



(2) 4~8 秒間

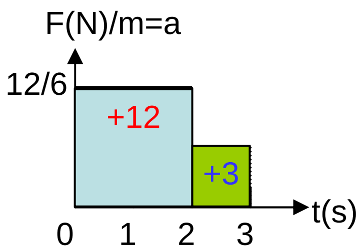
$$F_{4\sim8} = ma = 0$$

(3)8~10 秒間

$$F_{8\sim10} = ma = 0.1\times\frac{0-10}{10-8} = -0.5(N)$$

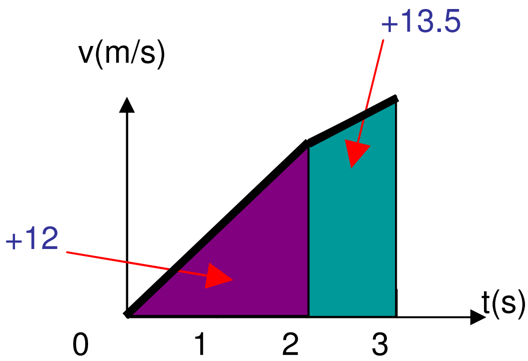
範例 08：

【解析】：(1)前 3 秒內的平均加速度爲?



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12+3}{3}$$
$$= 5\left(m/s^2\right)$$

(2) 前 3 秒內的平均速度爲?



$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{12+13.5}{3}$$
$$=8.5({}^{m}\!/_{s})$$

範例 09：

【解析】：解題關鍵：還記得第二章學過的微分嗎?

$$x=3t^2+2t+1$$
$$v=6t+2$$
$$a=6$$
$$\Rightarrow F=ma=5\times 6$$
$$=30(N)$$

範例 10：

【解答】：(A)

【解析】：

範例 11：

【解析】：解題關鍵：加速時的加速度爲何？減速時的加速度爲何？要畫圖還是代公式解呢?

(1)上升時的合力：

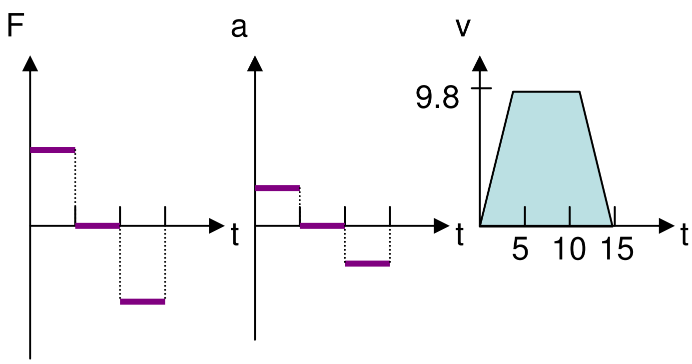
$$a_{上}=\frac{72g-60g}{60}=\frac{1}{5}g\uparrow$$

(2)下降時的合力：

$$a_{下}=\frac{60g-48g}{60}=\frac{1}{5}g\downarrow$$

總距離：

$$v=v_0+at=0+\frac{1}{5}g\times 5=9.8(m/s)\qquad\Rightarrow S=\frac{5+15}{2}\times 9.8=98(m)$$



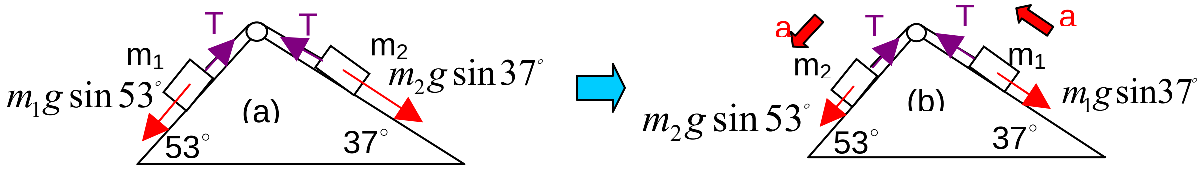
範例 12：

【解析】：

$$\begin{cases} m_1 g\sin 53^\circ = m_2 g\sin 37^\circ \\ m_2 g\sin 53^\circ - T = m_2 a \end{cases}$$

$$T - m_1 g\sin 37^\circ = m_1 a$$

$$a = \frac{m_2 g\sin 53^\circ - m_1 g\sin 37^\circ}{m_1 + m_2} = \frac{4g\times\frac{4}{5} - 3g\times\frac{3}{5}}{4+3} = \frac{1}{5}g$$



範例 13：

【解析】：

$$\ell = \frac{1}{2}(g\sin 37^\circ)t^2$$

$$a = \frac{mg\sin 37^\circ - f_c}{m}$$

$$= \frac{mg\sin 37^\circ - \mu_k mg\cos 37^\circ}{m} \quad \textbf{(沿斜面)}$$

$$\ell = \frac{1}{2}\left(g\sin 37^\circ - \mu_k g\cos 37^\circ\right)(2t)^2$$

$$\Rightarrow g\sin 37^\circ = 4\left(g\sin 37^\circ - \mu_k g\cos 37^\circ\right)$$

$$3 = 4(3 - \mu_k \times 4) \quad \therefore \mu_k = \frac{9}{16}$$

範例 14：

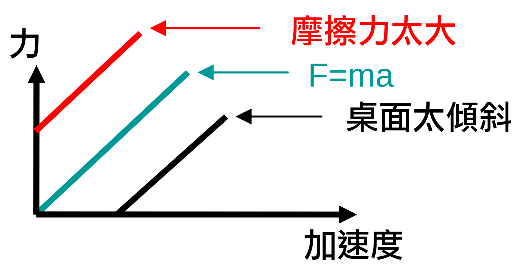
【解答】：

【解析】：

(1)不需要,維持固定即可

(2)不需要,希望重力沿斜面的分量與摩擦力抵消

(3) $a = \dfrac{\dfrac{d_2}{\Delta t} - \dfrac{d_1}{\Delta t}}{\Delta t}$



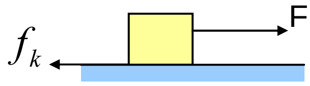
範例 15：

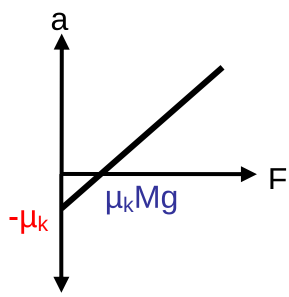
【解答】：(C)

範例 16：

【解答】：(A)(B)(C)

【解析】：





$$\Rightarrow F - \mu_k Mg = Ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{M}F - \mu_k g$$

$(y = mx + k)$ **Y軸截距**

$$\Rightarrow F - \mu_k Mg = Ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{M}F - \mu_k g$$

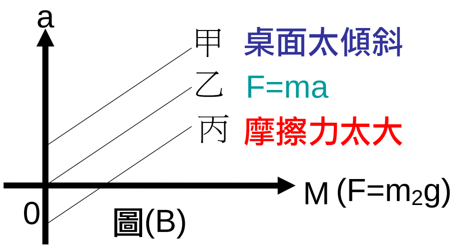
$(y = mx + k)$ **Y軸截距**

$$F - f_k = Ma$$

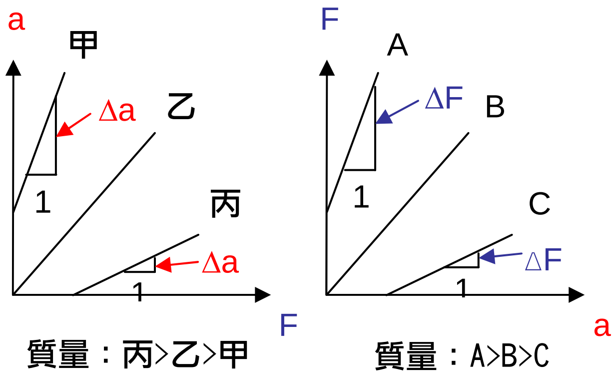
$$= \frac{F}{M} = \mu_k g \quad \Rightarrow F = \mu_k Mg$$ **X軸截距**

範例 17

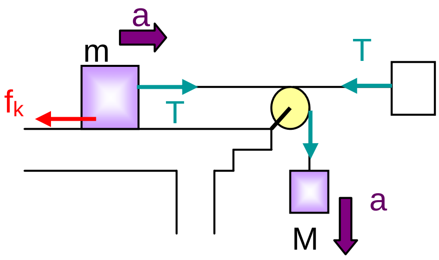
【解析】：



※斜率相同代表系統之質量相同（ $m = \frac{1}{M}$ ）



範例 18：



【解析】：(1)

$$
\begin{aligned}
T &= ma \\
+\quad Mg - T &= Ma \\
\hline
Mg &= (M+m)a
\end{aligned}
$$

(1) $a=\dfrac{Mg}{M+m}$

(2) $a = \dfrac{Mg - \mu mg}{M + m}$

(2) $a = \dfrac{Mg - mg}{M + m}$

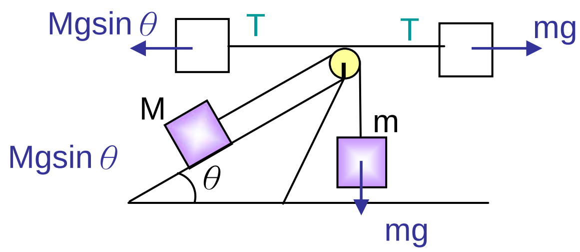
(3) $a = \dfrac{Mg}{M + m}$

(4) $a = \dfrac{Mg - mg}{M + m}$

範例 19：

【解答】：$a=\dfrac{Mg\sin\theta-mg}{M+m}$(若假設錯誤，則多負號)

【解析】：(1)



(2) $a=\dfrac{Mg\sin\alpha-mg\sin\beta}{M+m}$

範例 20：

【解析】：(1)

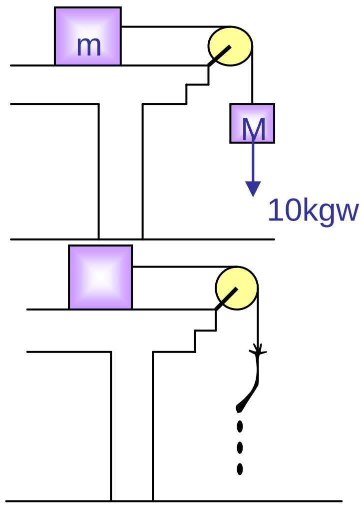
$$a=\frac{Mg}{M+m}=\frac{10g}{10+5}=\frac{2}{3}g$$

$\Rightarrow 10kgw$ 讓整個系統一起加速

(2)

$$a=\frac{F}{m}=\frac{10g}{5}=2g$$

$\Rightarrow 10kgw$ 只讓 m 加速



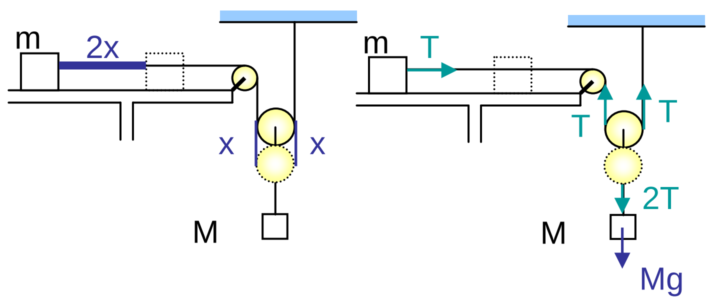
範例 21：

【解析】：

$$\begin{cases} T=m\times 2a & \text{——— ①} \\ Mg-2T=M\times a & \text{—— ②} \end{cases}$$

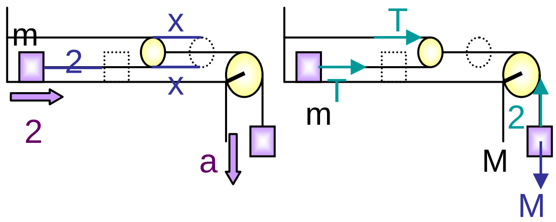
①x 2+②

$\Rightarrow Mg=(M+4m)a \therefore a=\dfrac{Mg}{M+4m}$



範例 22：

【解析】：



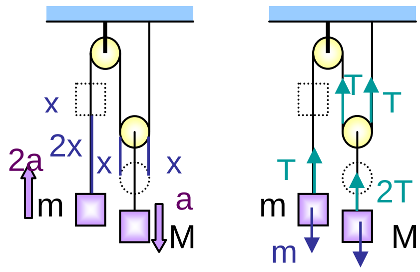
$$\begin{cases} T = m\times 2a & \text{———— ①}\\ Mg-2T = M\times a & \text{—— ②}\end{cases}$$

①x 2 + ② $\quad \therefore a = \dfrac{Mg}{M+4m}$

$$Mg = (M+4m)a$$

範例 23：

【解析】



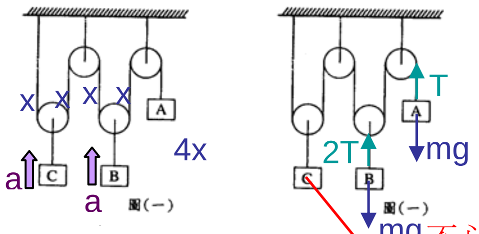
$$T - mg = m\times 2a \text{ ——— ①}$$

$$Mg - 2T = M\times a \text{ —— ②}$$

①x 2 + ② $\quad \therefore a = \dfrac{Mg-2mg}{M+4m}$

範例 24：

【解析】：



分析A：$2T - mg = ma$

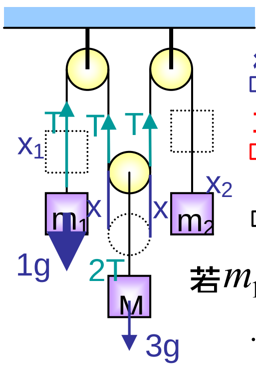
分析B：$mg = 9ma$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{9}g \quad a_A = \dfrac{4}{9}g$

不必分析C，因B與C加速度相同

範例 25：

【解析】：



$$2x = x_1 + x_2$$

$$\xrightarrow{微分} 2v = v_1 + v_2$$

$$\xrightarrow{再微} 2a = a_1 + a_2$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} = a$$

$$若 m_1 = m_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

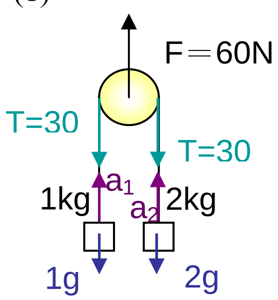
$$\therefore a = \frac{a_1 + a_2}{2} = a_1 = a_2$$

$$\begin{cases} T - 1g = 1a \\ 3g - 2T - 3a \end{cases} \Rightarrow g = 5a \Rightarrow a = \frac{1}{5}g$$

範例 26：

【解析】：

(1)

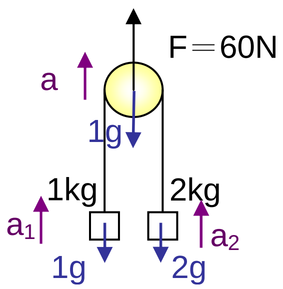


$$a_1 = \frac{T-g}{1} = \frac{30-10}{1} = 20\, {}^{m}/{}_{s^2}$$

$$a_2 = \frac{T-g}{2} = \frac{30-20}{2} = 5\, {}^{m}/{}_{s^2}$$

$$a_{動滑輪} = \frac{a_1 + a_2}{2} = 12.5\, {}^{m}/{}_{s^2}$$

(2)



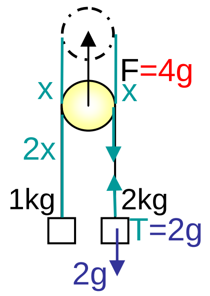
$$\begin{cases} 60 - 2Fg = 1a \\ T - 1g = 1a_1 \\ T - 2g = 2a_2 \\ a = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \end{cases}$$

$$120 - 4T - 2g = T - 1g + \frac{T}{2} - g$$

$$120 = \frac{11}{2}T \quad \therefore T = \frac{240}{11}$$

(3)

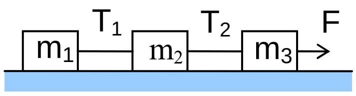
$$a_1 = \frac{20-10}{1} = 10\, {}^{m}/{}_{s^2}$$



$$a=\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{10+0}{2}=5\,{}^{m}\!/\!_{s^2}$$

範例 27：

【解析】:



(1)要解 a，分析<u>全部</u> (T_1與T_2為系統內力)

$$a=\frac{F}{m_1+m_2+m_3}$$

(2)要解 T1，分析<u>m_1</u>

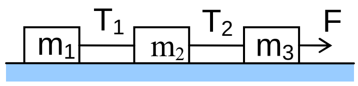
$$T_1=m_1a$$

(3)要解 T2，分析<u>m_1+m_2</u> (T1為系統內力)

$$T_2=(m_1+m_2)a$$

範例 28：

【解析】:



(1)要解 a，分析<u>全部</u>

$$a=\frac{F-3f}{m+m+m}=\frac{F-3f}{3m}$$

(2)要解 T1，分析<u>m_1</u>

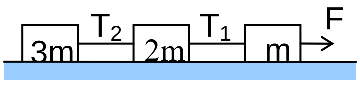
(3)要解 T2，分析<u>m_1+m_2</u>

$$\left.\begin{aligned}T_1-f&=ma\\T_2-2f&=2ma\end{aligned}\right]\ \frac{T_1}{T_2}=\frac{ma+f}{2ma+2f}=\frac{1}{2}$$

(若不計摩擦力，則解相同，因爲 f 與 m 成正比。)

範例 29：

【解析】：



(只需考”後方”所拉之物體質量)∴ F：T1：T2 = 6：5：3

範例 30：

【解析】：

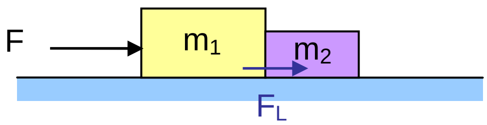
(重力所造成與桌面之有異曲同功之妙，∴可省略不計)

⟹ F：T1：T2 = 3：2：1

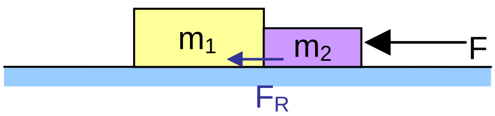
範例 31：

【解析】：

(1)要解 FL，分析 m_2



(2)要解 FR，分析 m_1



$$\begin{cases} F_L = m_2 a \\ F_R = m_1 a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{F_L}{F_R} = \frac{m_2}{m_1}$$

＊從右邊推和從左邊推之 a 相同

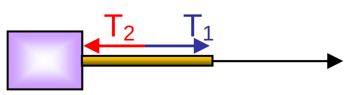
範例 32：

【解析】：

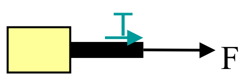
$$T_1 - T_2 = ma$$

∴**只有當**m=0 or a=0**時**，

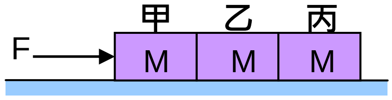
$T_1 = T_2$



$$T = (M + \frac{m}{2})a \qquad = (M + \frac{m}{2})(\frac{F}{M+m})$$



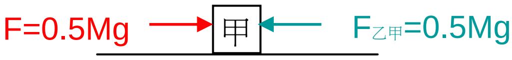
範例 33：



【解答】：(A)(C)(D)

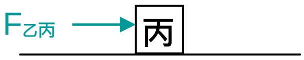
【解析】：乙與桌面的最大靜摩擦力=0.7Mg，動摩擦力=0.6Mg

(A)當F=0.5Mg時，三物 不移動 ， 要解 $F_{甲乙}$，分析 甲



$|F_{甲乙}|$=0.5Mg($F_{甲乙}$與$F_{乙甲}$為作用力與反作用力)

(B)當 F=0.5Mg 時，三物 **不移動** ， 要解 F 乙丙，分析 **丙**

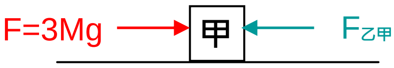


丙不動，$F_{乙丙}=0$

(C)當 F=3Mg 時，三物 **會移動** ， 要解 a，分析 **全部**

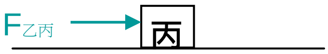
$$a=\frac{3Mg-0.6Mg}{3M}=0.8g$$

(D)當 F=3Mg 時，三物 **會移動** ， 要解 F 甲乙，分析 **甲**



$$3Mg-F_{乙甲}=M\times 0.8g \quad \Rightarrow F_{乙甲}=2.2Mg$$

(E)當 F=3Mg 時，三物 會移動 ，要解 F 乙丙，分析 丙



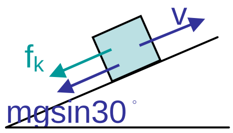
$$F_{乙丙}=M\times 0.8g=0.8Mg$$

＊**若分析乙，則可知乙受三力， 為最複雜之解法**。

範例 34：

【解析】：

$$\mu_k=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{mg\sin 30^\circ+\frac{1}{\sqrt{3}}mg\cos 30^\circ}{m}$$



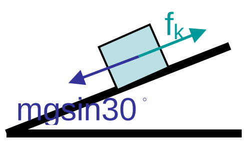
$$0=v+(-g)t \quad t=\frac{v}{g}$$

範例 35：

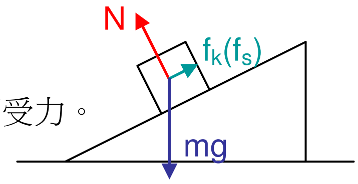
【解析】：

$$a=\frac{mg\sin 30^\circ-f_k}{m}=\frac{mg\sin 30^\circ-\mu_k mg\cos 30^\circ}{m}=\frac{g}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k=\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k \quad \therefore \mu_k=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$



範例 36：



【解析】：(1) m 等速下滑：

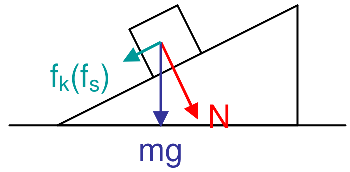
M 只受 mg(fk 與 N 之合力)、Mg、N’ 之作用，水平方向不受力。

∴f = 0

(2) m 靜止：

同理 m 在 M 上靜止，合力=0，水平方向仍不受力。

∴f = 0



範例 37：

【解答】：(B)

【解析】：(A)總功應為+0.5mv^2

(B)

$$v = 0 + (\frac{\mu_k mg}{m})t \qquad t = \frac{v}{\mu_k g}$$

(C)所受靜力為 $\mu_k$mg

(D)方向為向+X 方向

(E)箱子等速運動 = v，f = 0

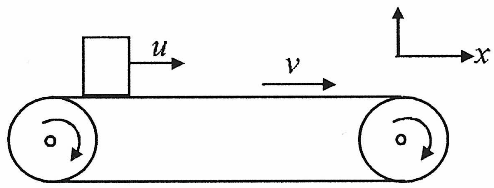
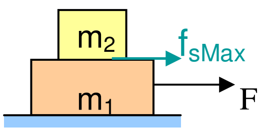


圖 5

範例 38：

【解析】：(m2 欲往後，fs 向前) ＊當 fs 達最大值時，加速度亦達最大值。



$$a_{Max} = \frac{f_{sMax}}{m_1} = \frac{\mu_s m_1 g}{m_1} = \mu_s g \quad \text{(與m無關)}$$

$$F_{Max} = (m_1 + m_2)a_{Max}$$

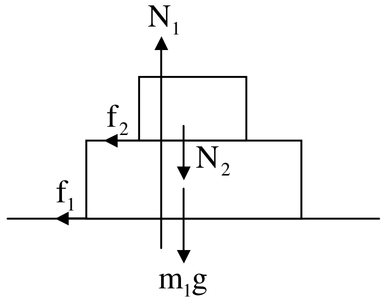
$$= (m_1 + m_2)\mu_s g$$

範例 39：

【解答】：$\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g$

【解析】：

m_1 所受力圖如右：



合力 $F = f_1 + f_2 = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$

$= \mu_1 (N_2 + m_1 g) + \mu_2 N_2$

$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$

$(\because N_2 = m_2 g)$

$F = m_1 a$

$$\Rightarrow a = \frac{\mu_1 (m_1 + m_2) + \mu_2 m_2}{m_1} g$$

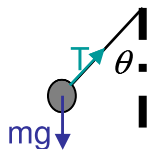
範例 40：

【解析】：

鉛直： $T\cos\theta = mg$ —— ①

水平： $T\sin\theta = ma$ —— ②

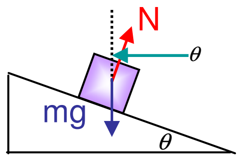
由　得　①



$$\frac{a}{g} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \frac{①}{②} \Longrightarrow \quad \therefore a = g\tan\theta$$

範例 41：

【解析】：備 註：此類問題，亦可用假想力的觀念解題。



鉛直： $N\cos\theta = mg$ —— ①

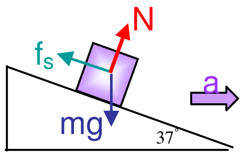
水平： $N\sin\theta = ma$ —— ②

由 ①得 $N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

$$\frac{①}{②} \Longrightarrow \frac{a}{g} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \therefore a = g\tan\theta$$

範例 42：

【解析】：$a = g\tan\theta$



鉛直：$N\cos 37^{\circ} + f_s \sin 37^{\circ} = mg$

水平：$N\sin 37^{\circ} - f_s \cos 37^{\circ} = ma$

因系統向右作等加速度運動，非靜力平衡，∴不可用拉密定理。

$\Rightarrow$ $N = 98(N)\quad f_s = 36(N)$

進階分析：

(1)a=gtanθ時，m 相對 M 靜止

(2)a<gtanθ時，m 相對 M 下滑(F 沿斜面向上)

(3)a>gtanθ時，m 相對 M 上滑(F 沿斜面向下)

範例 43：

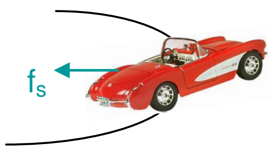
【解析】：解題思路：__靜摩擦力__提供向心力

$$f_{sMax} = f_c$$

$$\Rightarrow \mu_s mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore v = \boxed{\sqrt{\mu_s gR}}$$

與m無關



*若在 μs 不變的情況下，欲 v 上升則 R 上升才能達成。

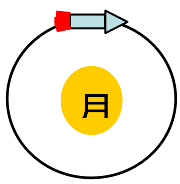
範例 44：

【解析】：解題思路：__萬有引力__提供向心力

$$(b)\frac{GM\,2m}{R^2} = 2m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{GM}{v^2}$$

$$(a)\frac{GM\,2m}{R^2} = 2m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

或 $$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi GM}{v^3}$$



範例 45

【解答】：9：13：14

【解析】

＊ 繞同心圓時，T(週期)、ω 是相同的物理量。

$T_1 = (3m)(3\ell)\omega^2$

$T_2 - T_1 = (2m)(2\ell)\omega^2$

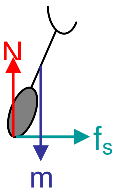
$T_3 - T_2 = (m)(\ell)\omega^2$

故 T_1：T_2：T_3=9：13：14

範例 46：

【解析】：

$$\begin{cases} N = mg \\ f_{sMax} = F_c \end{cases}$$



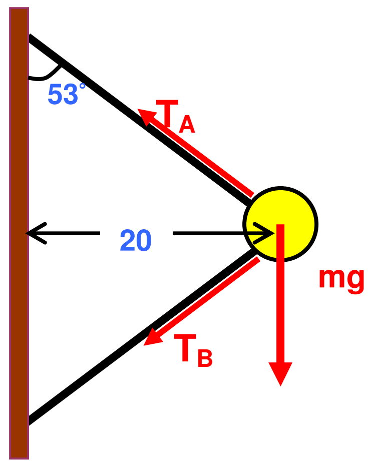
$$\Rightarrow \mu_s mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore v = \sqrt{\mu_s gR}$$

$$\tan\theta = \frac{f_{sMax}}{N}\frac{\mu_s N}{N} = \mu_s \qquad \therefore v = \sqrt{\tan\theta gR}$$

範例 47：

【解析】：



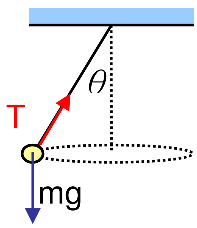
$$\begin{cases} T_A\cos 53° = T_B\cos 53° + mg \\ T_A\sin 53° + T_B\sin 53° = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}T_A - \frac{3}{5}T_B = 10\times 10 \\ \frac{4}{5}T_A + \frac{4}{5}T_B = 10\times\frac{10^2}{20} \end{cases}$$

範例 48：

【解析】：(1)繩之張力？

$$T\cos\theta = mg$$



$$\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

(2)旋轉速率？

$$T\sin\theta = ma_c$$

$$a_c = g\tan\theta = \frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow g\tan\theta = \frac{v^2}{L\sin\theta} \qquad \therefore v = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}$$

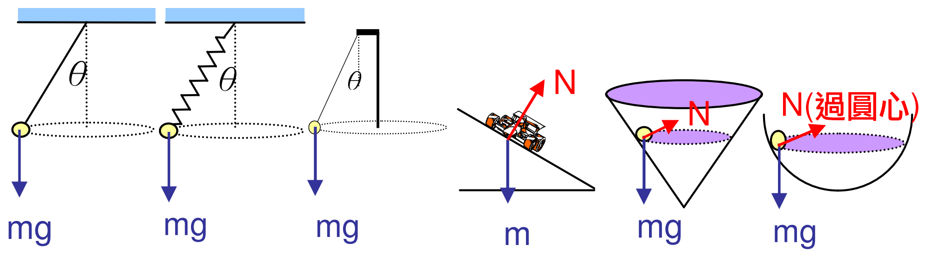
(3)週期？

$$a_c = g\tan\theta$$

$$= \frac{4\pi^2 L\sin\theta}{T^2} \qquad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{L\sin\theta}{g\tan\theta}}$$

範例 48

【解析】



範例 49：

【解析】：$N\sin\theta = mg$

$N\cos\theta = mR\omega^2$

$= mh\sin\theta\omega^2$ —— ②　$\dfrac{①}{②} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{h\sin\theta\omega^2}{g}$　$\therefore w = \sqrt{\dfrac{g\tan\theta}{h\sin\theta}}$

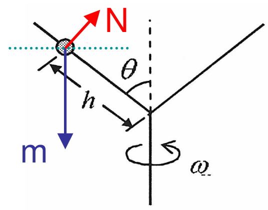
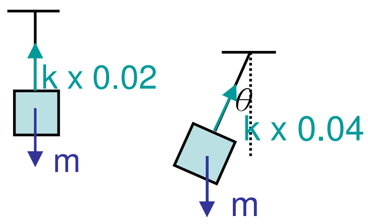


圖 14

範例 50：

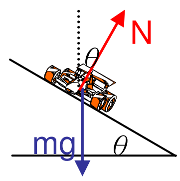
【解析】：



$mg = k\times 0.02$

$$\begin{cases} k\times 0.04\times\cos\theta = mg \\ k\times 0.04\times\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2mg\cos\theta = mg$　　$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　$\theta = 60^\circ$



範例 51：

【解析】：

$N\cos\theta = mg$ —— ①

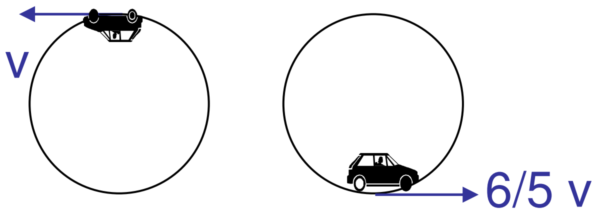
$N\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R}$ —— ②　　$\dfrac{①}{②} \Rightarrow \dfrac{v^2}{gR} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　$\therefore v = \sqrt{gR\tan\theta}$

＊當路面之傾斜角越大，可提供之安全速率越大。

若 $v > \sqrt{gR\tan\theta}$ 車子向外，fs 向內，若 $v < \sqrt{gR\tan\theta}$ 車子向內，fs 向外。

範例 52：

【解析】：



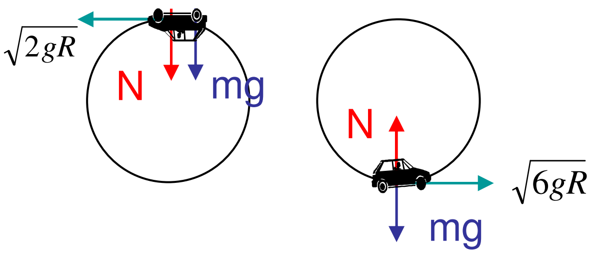
增加 E_k 等於減少的 U_g

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(\frac{6}{5}v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mg2R$$

$$\frac{11}{25}v^2 = 4gR \therefore v = \sqrt{\frac{100}{11}gR}$$

範例 53：

【解析】：



最高點：	最低點：
$F_c = N + mg$	$F_c = N' - mg$
$= m\frac{(\sqrt{2gR})^2}{R}$	$= m\frac{(\sqrt{6gR})^2}{R}$
$\Rightarrow N = mg$	$\Rightarrow N' = 7mg$

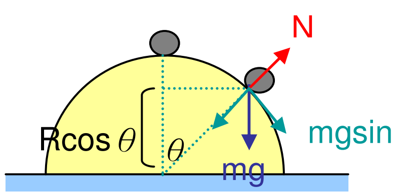
範例 54：

【解析】：

(1)能量分析求速率（增加 E_k 等於減少的 U_g ）

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg(R - R\cos\theta)$$

(2)力學分析求向心力



$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R} = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{R}$$

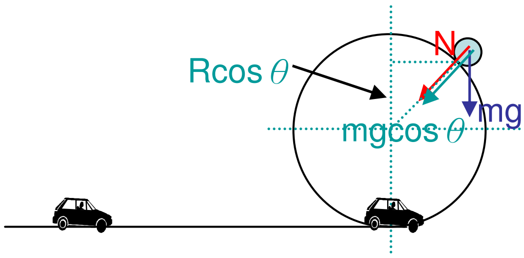
恰滑出時 $\Rightarrow N = 0$

$$\therefore \cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

範例 55：

【解析】：



(1)能量分析求速率（增加 E_k 等於減少的 U_g ）

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{4gR})^2-\frac{1}{2}mv^2=mg(R+R\cos\theta)$$

(2)力學分析求 Fc

$$mg\cos\theta+N=m\frac{v^2}{R}=\frac{m(4gR)-2mg(R+R\cos\theta)}{R}$$

恰滑出時 $\Rightarrow N=0$ $\quad\therefore\cos\theta=\frac{2}{3}\qquad\theta=\cos^{-1}\frac{2}{3}\approx 48.2^\circ$

範例 56：

最高點
$$T-mg\cos 60^o=m\frac{v^2}{R}=0$$
$$T=mg\cos 60^o=\frac{1}{2}mg$$

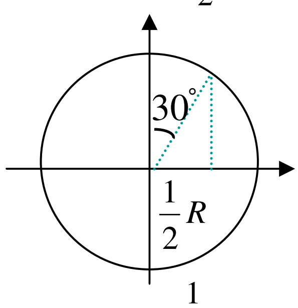
最低點 $\begin{cases}\frac{1}{2}mv^2=mg\frac{R}{2}\\ T'-mg=m\frac{v^2}{R}\end{cases}\Rightarrow T'=2mg$

故 T：T’=1：4

範例 57：

【解析】：

(1)自平衡點移動 $\frac{1}{2}$ R，最小需時多久?

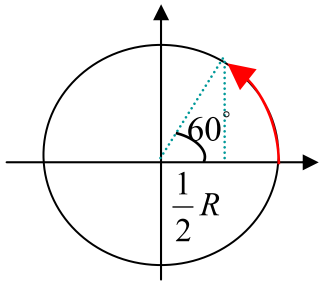


$360^\circ\to T$

$30^\circ\to\frac{1}{12}T$

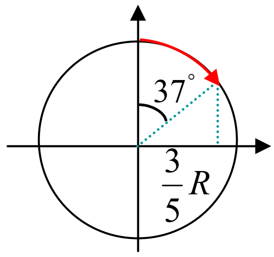
$\frac{1}{2}$

(2)自端點移動　　R，最小需時多久?



$$60^\circ \rightarrow \frac{1}{6}T$$

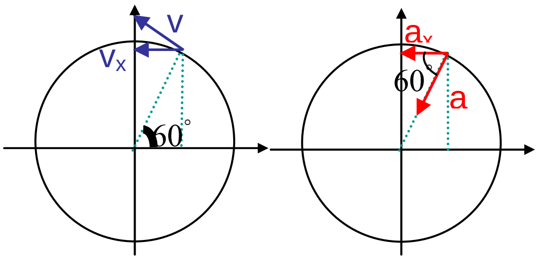
(3)自平衡點移動 $\frac{3}{5}$ R，最小需時多久?



$$37^\circ \rightarrow \frac{37}{360}T$$

範例 58：

【解析】:



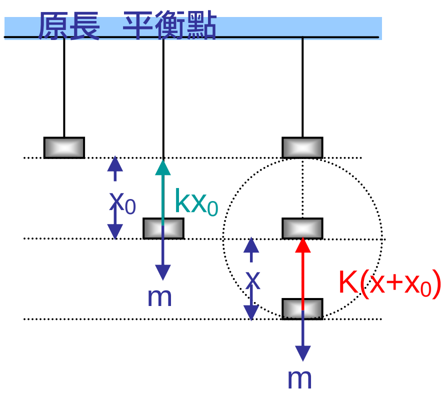
$$v_x = v\cos 30^\circ$$
$$= v\sin 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}v = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\pi R}{T}$$

$$a_x = a\sin 30^\circ$$
$$= a\cos 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

範例 59：

【解析】:

$$\begin{cases} mg = kx_0 \\ \sum F = k(x+x_0) - mg = kx \end{cases}$$



* $F = kx$　1. **虎克定律：x由原長起算**

　　　　　2. SHM：**x由平衡點起算**

牛刀大試　：$\frac{2}{7}\pi$

提示 g=9.8 注意單位 標準單位是 m 不是 cm

範例 60：

【解析】：$mg = kL$

(1)最大恢復力?

上端點：$\sum F = mg - 0 = mg \downarrow$

下端點：$\sum F = k \cdot 2L - mg = mg \uparrow$

平衡於對稱點

(2)最大加速度?

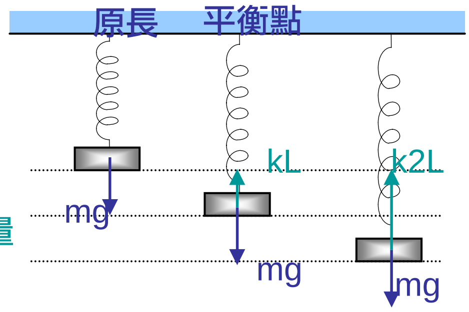
$$a_{Max} = \frac{F_{Max}}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

＊最大 a 算出後每點之 a 皆可代

(3)週期?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

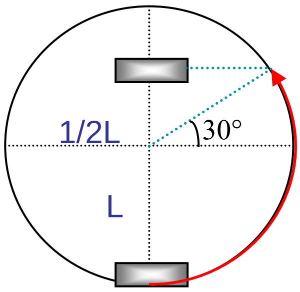
伸長量



(4)最大速率?

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi L}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \sqrt{gL}$$

(5)由最低點至伸長量爲 L/2 所經歷之時間?



$360° \to T$

$120° \to \frac{1}{3}T$

$$t = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}{3}$$

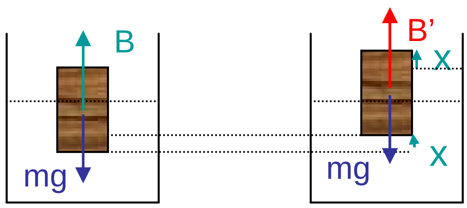
範例 61：

【解析】：

浮力　B=ρVg；

簡諧運動週期公式：　$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

浮力=密度 x 沒在液面下之體積 x g



$mg = B$

$\sum F = mg - B'$

v

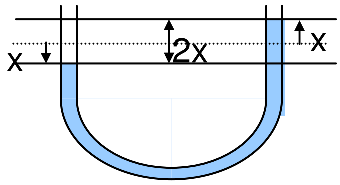
$$= mg - (B - \overbrace{A}^{v}xdg)$$

$$= \underbrace{Adg}_{k}x$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{\rho Ah}{Adg}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{dg}}$$

範例 62：

【解析】：



$$P = \frac{F}{A} = hdg$$

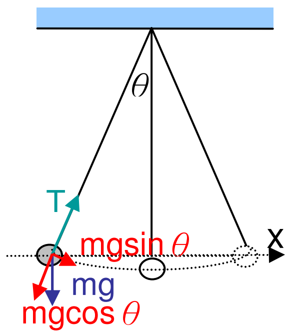
$$\sum F = PA = (2x \cdot d \cdot g)A$$

$$= 2\underbrace{dgAx}_{k}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{dAL}{2dgA}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

範例 63：

【解析】：



角度甚小時(θ <5°)：

$$\sum F_x \approx mg\sin\theta \quad \approx mg\frac{x}{\ell} = \underbrace{\frac{mg}{\ell}}_{k}x$$

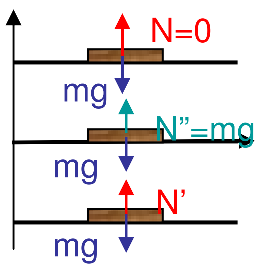
$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\ell}}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$ (與 θ 無關)

單擺之週期公式(注意 T 之單位)

＊小角度之單擺≒SHM(≠SHM)

範例 64：

【解析】：



(1)分析最高點的合力：

上端點：$\sum F = mg - 0 = mg = k \times 0.1$

週期：$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{g}} = \frac{2}{10}\pi = \frac{1}{5}\pi$

(2)分析最低點的合力：

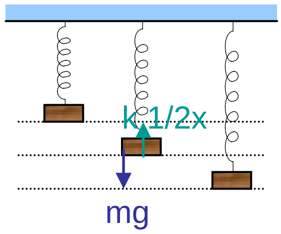
下端點：$\sum F = N' - mg = mg \uparrow \Rightarrow N' = 2mg$

【補充】：平衡點合力= 0 ，故板之正向力 N"=mg

＊N=0, N”=mg, N’=2mg

$\Rightarrow Fx \propto x$　　(可驗證 SHM 之定義)

範例 65：



【解析】:

分析平衡點的受力：

$$mg = k\frac{x}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{2mg}{k}$$

範例 66：

【解析】：震度是由加速度去定義。

角頻率 ＝ ω，此題不寫角速度之原因爲非等速率圓週運動。

$F = kx = ma$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 x = a$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\omega^2}$$

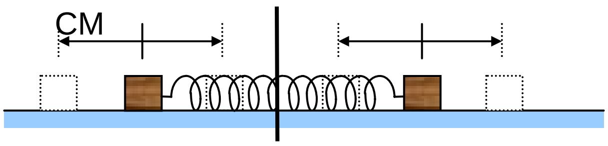
$$= \frac{0.32 \times 9.8}{5.6^2} = 0.1m = 10cm$$

速解：$a = R\omega^2 \quad \Rightarrow R = \frac{a}{\omega^2} = 0.1$

＊SHM之a_{Max}=等速率圓周運動之a

範例 67：

【解析】：解題思路：系統的質心恆不動



視爲質心綁在牆上→彈簧分爲兩段，

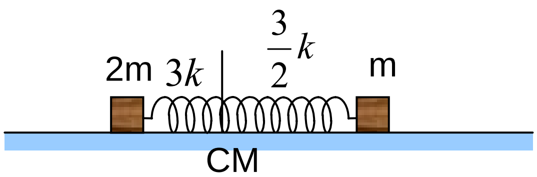
彈力常數 ＝2k (其中一側不看)

＊ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 之公式建立在彈簧一端固定，另一端作 SHM 之前提下

$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

範例 68：

【解析】：



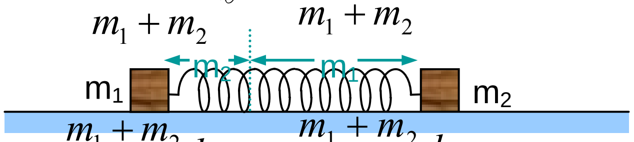
$$T_{右} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{3}{2}k}} = T_{左} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

質心不動∴T.R 必爲同進同出

範例 69：

【解析】：

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\ell \qquad \frac{m_1}{m_1+m_2}\ell$$



$$\frac{m_1+m_2}{m_2}k \qquad \frac{m_1+m_2}{m_1}k$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{\frac{m_1+m_2}{m_2}k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}{k}}$$

減縮質量(reduced mass)

(彈簧不切割之情況下，質量縮減)

範例 70：

【解析】：

$$\begin{cases} x = 6\cos(3\pi t) \\ x = R\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow R = 6, \omega = 3\pi$$

(1)振幅　$R = 6$

(2)最大速度　$v = \omega t = 18\pi\ m/s$

(3)最大加速度　$a = R\omega^2 = 54\pi^2\ m/s^2$

(4)週期　$T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

範例 71：

【解析】：

(1)

$$\begin{cases} x = 0.25\cos(0.50t) \\ x = R\cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow R = 0.25, \omega = 0.5$$

$$\therefore a = R\omega^2 = \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\ cm/s^2$$

(2)

$$\begin{cases} x = 0.25\sin(0.50t) \\ x = R\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow R = 0.25, \omega = 0.5$$

(從270° 出發)

$$\therefore a = \frac{1}{16}\ cm/s^2$$

範例 72：

【解析】：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{4}{R}\right)^2+\left(\dfrac{6}{\omega R}\right)^2=1 \\ \left(\dfrac{3}{R}\right)^2+\left(\dfrac{8}{\omega R}\right)^2=1 \end{cases} \Rightarrow R=5, \omega R=10 \quad \therefore \omega=2$$

(1)振幅： $R=5$

(2)週期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

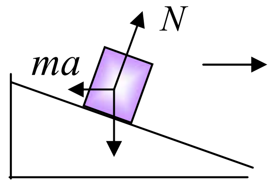
(3)最大速率： $v=R\omega=10$

範例 73：

【解析】：

慣性系：$\begin{cases} N\cos\theta=mg \\ N\sin\theta=ma \end{cases}$ $\sum F=ma$

加速系：$\begin{cases} N\cos\theta=mg \\ N\sin\theta=ma \end{cases}$ $F_{右}=F_{左}\Rightarrow \sum F=0$

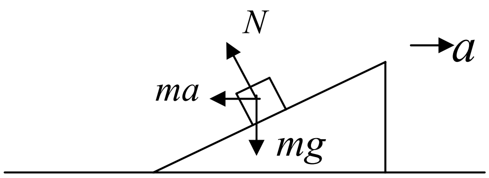


範例 74：

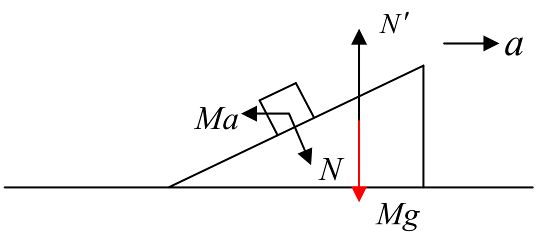
【解析】：

$$a=\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \qquad N=\frac{Mmg\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

看 m：



看 M ：



對 m：垂直斜面之合力=0

$N + ma\sin\theta = mg\cos\theta$

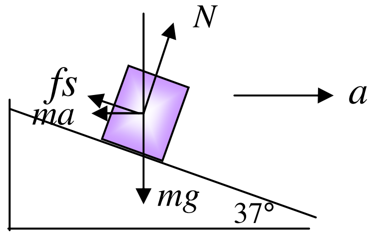
沿斜面作等加，$ma\cos\theta + mg\sin\theta = ma'$

對 M：水平方向作等加，$Ma = N\sin\theta$

鉛直方向，$\sum F = 0 \quad N' = Mg + N\cos\theta$

由 $N = \dfrac{M}{\sin\theta}a$ 代入 $\Rightarrow \left(\dfrac{\mathrm{M}}{\sin\theta} + m\sin\theta\right)a = mg\cos\theta$

$\therefore a = \dfrac{mg\cos\theta\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$



範例 75：

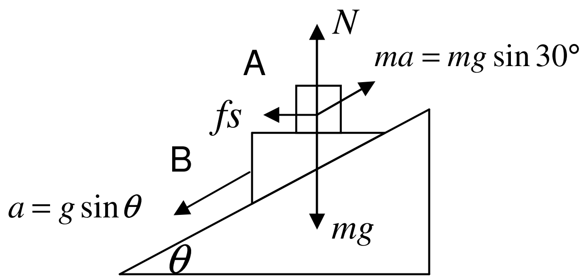
【解答】：N=98(N)；fs=36(N)

【解析】：

若無摩擦力 $\Rightarrow a = g\tan\theta = 10\times\tan 37° = 7.5\,m/s^2 > 3\,m/s^2$

∴欲向下滑，則 fs 向上

$\begin{cases} N\cos 37° + fs\sin 37° = mg & \text{鉛直合力=0} \\ \mathrm{N}\sin 37° = \mathrm{fs}\cos 37° + \mathrm{ma} & \text{水平合力=0} \end{cases}$



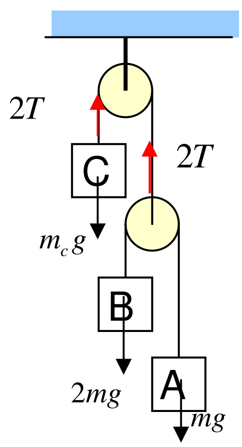
範例 76：

【解答】：150N；50N

【解析】：

$\begin{cases} \text{沿斜面鉛直} \quad N + (mg\sin 30°)\sin 30° = mg \\ \text{沿斜面水平} \quad fs = (mg\sin 30°)\cos 30° \end{cases}$

$\Rightarrow N + 20\times 10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 20\times 10 \quad fs = 20\times 10\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \quad \therefore N = 150$



範例 77：

【解答】：$\frac{8}{3}$m；$\frac{1}{17}$ g

【解析】：

$(1)\mathrm{a} = \dfrac{2\mathrm{mg} - \mathrm{mg}}{2m + m} = \dfrac{1}{3}g$

$T - mg = ma = m\times\frac{1}{3}g$

$\Rightarrow T = \frac{4}{3}mg$

$2T = m_c g \quad \therefore m_c = \frac{8}{3}m$

<快攻>： $m_c = \dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}$

pf： $a = \dfrac{m_2g - m_1g}{m_1+m_2}$

$T - m_1g = m_1a = m_1\dfrac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}g$

$$T = m_1g + \frac{m_1(m_2-m_1)}{m_1+m_2}g$$

$$= \frac{m_1(m_1+m_2)}{m_1+m_2}g + \frac{m_1(m_2-m_1)}{m_1+m_2}g$$

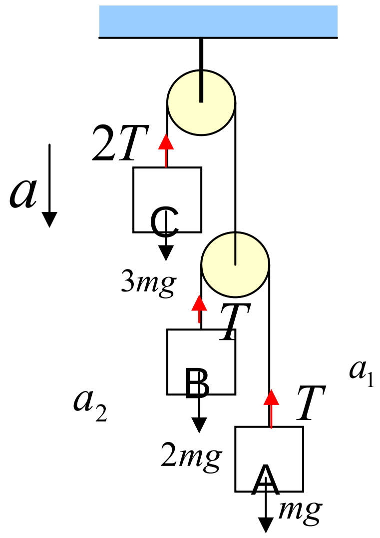
$$= \frac{2m_1m_2}{m_1m_2}g$$

$$\therefore m_c = 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

$(2) 2X = X_1 + X_2$

⇨ **動滑輪方程式：**

$2a = a_1 + a_2$



對A而言： $2T - 2mg = 2ma_1$

對B而言： $T - 2mg = 2ma_2$

$\Rightarrow 4ma = 3T - 4mg$

對C而言： $3mg - 2T = 3ma$

$2a = a_1 + a_2$

$8ma = 6T - 8mg$ $\quad\Rightarrow 9mg - 8mg - 8ma = 9ma$

$9mg - 6T = 9ma$ $\quad\therefore a = \dfrac{1}{17}g$

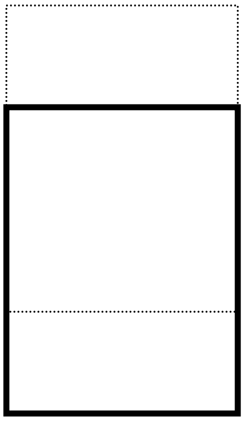
<快攻>：以題之(1)結果，將 AB 視爲 $\dfrac{8}{3}$ m

$$\Rightarrow a = \frac{3mg - \frac{8}{3}mg}{3m + \frac{8}{3}m} = \frac{\frac{1}{3}mg}{\frac{17}{3}m} = \frac{1}{17}$$

範例 78：

【解析】：

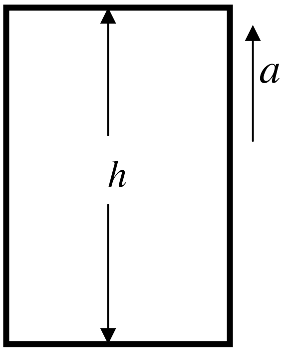
【解法<一>】：搞不懂假想力，我要用「慣性座標系」的觀點解！



$$S_{球}+S_{電}=h$$

$$\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}at^2=h$$

【解法<二>】：「假想力」聽起來比較有學問，我要用「加速座標系」的觀點解！



$$g'=g+a$$

$$\frac{1}{2}g't^2=h\Rightarrow\frac{1}{2}(a+g)t^2=h$$

$$\therefore t=\sqrt{\frac{2h}{g'}}=\sqrt{\frac{2h}{g+a}}=\sqrt{\frac{2h}{\frac{4}{3}g}}$$

範例 79：

【解析】：

$$(1)R=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2$$ ⇒ **水平作等加，t由鉛直上拋來決定**

$$(2)R'=\frac{1}{2}at'^2=\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2h}{g}}^2$$

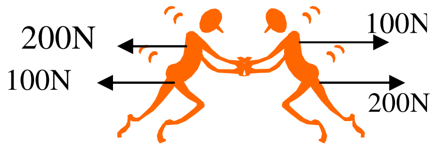
$$(3)\tan\theta=\frac{ma}{mg}=\frac{a}{g}\Rightarrow\theta=\tan'\frac{a}{g}$$

$$(4)T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

$$(5)\tan\theta=\frac{a}{g}$$

範例 80：

【解析】：



$$a_{甲}=\frac{100+200}{100}=30\,m/s^2$$

$$a_{乙}=\frac{100+200}{40}=\frac{30}{4}\,m/s^2$$

範例 81：

【解析】：

兩人互提之力爲系統內力

70 + 50 =120 kgw

突然蹲下，磅秤讀數先減再增

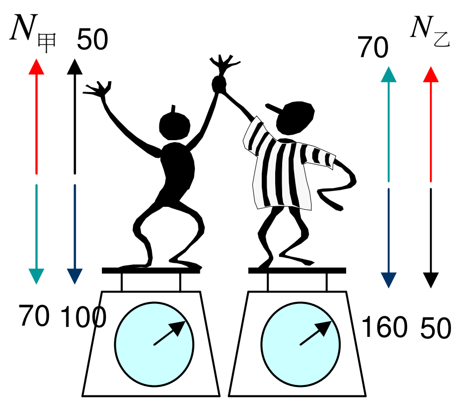
(1) C_M下降，$a_c\downarrow$，$mg > N$，N減小

(2) C_M上升，$a_c\uparrow$，$mg < N$，N增大

範例 82：

【解析】：

$$\begin{aligned} N_{甲}+50&=100+70 \\ N_{乙}+70&=50+60 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} N_{甲}&=120 \\ N_{乙}&=40 \end{aligned}$$



突然站起，磅秤讀數先增再減

(1) C_M上升，N變大

(2) C_M下降，N變小

範例 83：

【解答】：(A)(B)(C)

【解析】：(C)作用力與反作用力