

第三章 靜力平衡

P.3

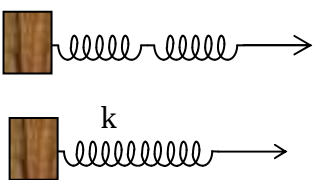
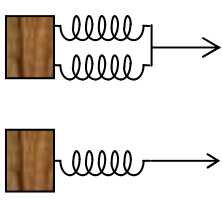
030003  **力學分析步驟①→ 選擇適當的受力物**

適當的受力物	意 義
質點(物體)	一般問題，必須分析 所有 的受力物，一一列出方程式
系 統	可將部份物體視為系統，則內力不影響系統的運動狀態
受力點	繩子的連接點

※ What is the “key word”? 適 當

P.10

030104  **彈簧的串聯(serial)與並聯(parallel)**

種 類 圖 示	串 聯	並 聯
		
雙彈簧的等效彈力常數	$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$	$k = k_1 + k_2$
證 明	$F = F_1 = F_2$ (同一繩，其張力同) $x = x_1 + x_2$ F $\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$ $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ 大 小 小 單位才會對 $\therefore k < k_1, k < k_2$	$F = F_1 + F_2$ $x = x_1 = x_2$ $kx = k_1 x_1 + k_2 x_2$ $k = k_1 + k_2$
等效彈力常數公式	$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots}$	$k = k_1 + k_2 + \dots$
記 法	倒數的和，取倒數	直接相加
特 色	串聯後的等效彈力常數，比原來最小的彈力常數值還小	並聯後的等效彈力常數，比原來最大的彈力常數值還大
記 法	比最小的還小	比最大的還大

P.11

030105 

彈簧的串聯(serial)與並聯(parallel)

- 1、4 N/m 與 4 N/m 並聯，等效彈力常數為 8 N/m。
- 2、4 N/m 與 4 N/m 串聯，等效彈力常數為 2 N/m。
- 3、6 N/m 與 6 N/m 串聯，等效彈力常數為 3 N/m。
- 4、6 N/m 與 3 N/m 串聯，等效彈力常數為 2 N/m。
- 5、3 N/m、3 N/m 與 3 N/m 串聯，等效彈力常數為 1 N/m。
- 6、6 N/m、3 N/m 與 2 N/m 串聯，等效彈力常數為 1 N/m。
- 7、4 N/m、3 N/m 並聯，等效彈力常數為 4 N/m。(判斷是否正確) 否
- 8、4 N/m、3 N/m 串聯，等效彈力常數為 3 N/m。(判斷是否正確) 否

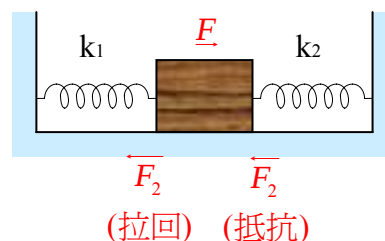
030106 

串聯??並聯??

串聯與並聯的根本差別不在於連接形式，而在於：
並聯是共同分擔外力，串聯是受相同外力。

若為原長時→才會是並聯

$$\therefore F = F_1 + F_2$$



P.18

030118 

彈簧的分割

- 1、4 N/m 與 4 N/m 串聯，等效彈力常數為 2 N/m。



- 2、反之，把彈力常數為 2 N/m 的彈簧，等分成兩段，每一段的彈力常數為 4。



- 3、n 條彈力常數為 nk 的彈簧串聯，等效彈力常數為 k N/m。
- 4、將一條彈力常數為 k 的彈簧，分成 n 段，每一段的彈力常數為 nk；
即反求，n 條彈力常數為 nk 的彈簧串聯，其等效彈力常數為 k。

結論：分割彈簧，每一小段彈簧的彈力常數與原長成 反 比。

- 5、將一條彈力常數為 k 的彈簧，分成長度比 m : n 的兩段，則兩段的彈力常數

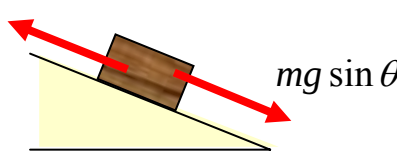
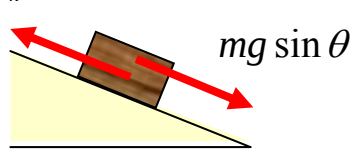
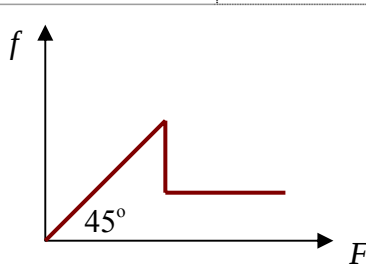
分別為 $\frac{m+n}{m}k$ 及 $\frac{m+n}{n}k$ 。【切成(m+n)段，再串聯】

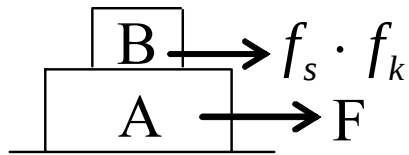
6. 可以推廣：彈簧的彈力常數與長度成反比，與截面積成正比 $\rightarrow k \propto \frac{A}{\ell}$ 。

P.33

030201 

摩擦力

	靜 摩 擦 力	動 摩 擦 力
常用符號	f_s	f_k
意 義	物體不動，為抵抗外力，摩擦面施予物體的力	物體滑動時，摩擦面施予物體的力
方 向	與運動趨勢相反	與運動方向相反(相對運動)
力的大小	變力，存在最大值	定力，與速度無關
公 式	$f_{sMax} = \mu_s \cdot N$ $* f_s \leq \mu_s \cdot N$	$f_k = \mu_k \cdot N$ $\rightarrow \text{無單位}$
摩擦係數的性質	1、 μ_s 只跟接觸面的性質有關，與正向力、接觸面積無關 2、無單位 3、 $0 \leq \mu_s < \infty$ ，但通常 < 1	1、 μ_k 只跟接觸面的性質有關，與正向力、接觸面積、速率無關 2、無單位 3、 $0 \leq \mu_k < \infty$ ，但通常 < 1
測定法與分析	【利用特性：恰下滑】 $f_{sMax} = \mu_s N$  $mg \sin \theta_s = f_{smax} = \mu_s \cdot N$ $= \mu_s \cdot mg \cos \theta_s$ $\therefore \mu_s = \tan \theta_s$	【利用特性：等速滑動】 $f_k = \mu_k N$  $mg \sin \theta_k = f_k = \mu_k \cdot N$ $= \mu_k \cdot mg \cos \theta$ $\mu_k = \tan \theta_k$
測定值	$\mu_s = \tan \theta_s$	$\mu_k = \tan \theta_k$
圖 示		



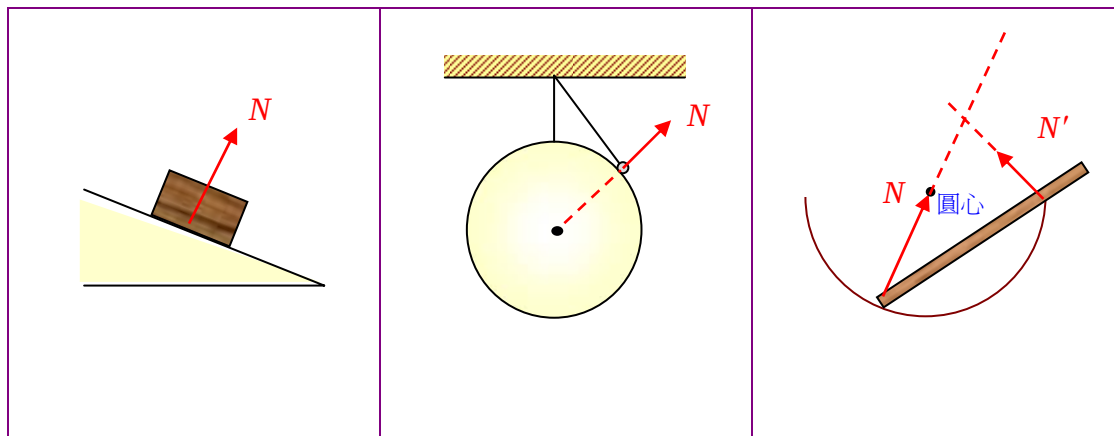
A 向前， $\therefore$ 相對 A 來說 B 向後
 $\therefore A \rightarrow B$ 的 f 是向前

輪胎鎖死時受的是動摩擦力

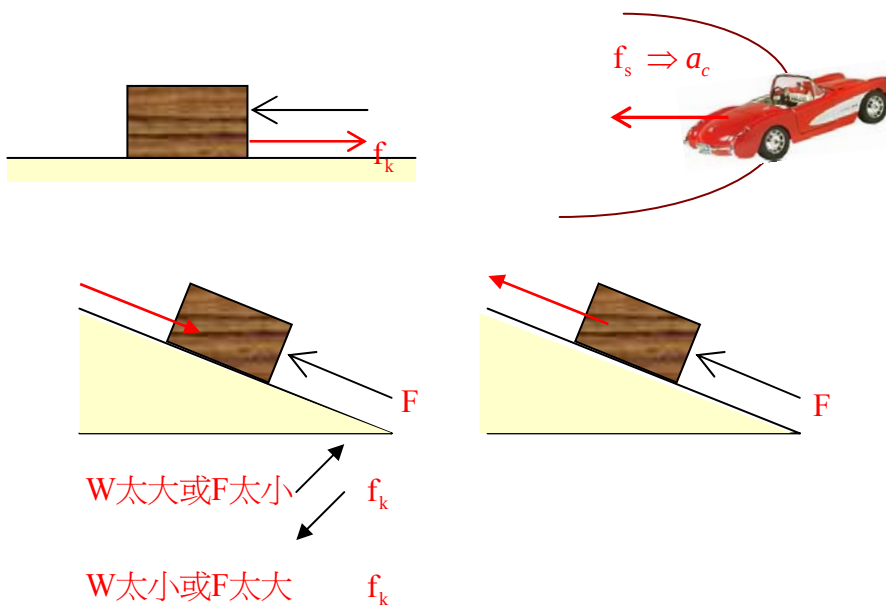
花紋：排水

P.35

030203  正向力 ,

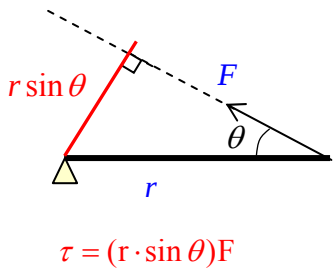
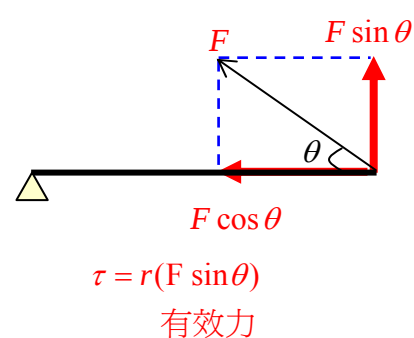


030204  靜摩擦力的方向



P.41

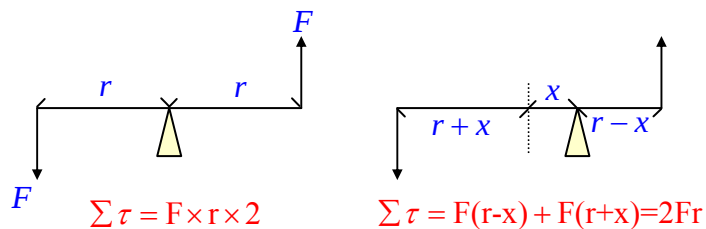
030301 **力矩(moment of force)的意義**

	力 矩	
物理意義	描述物體轉動的趨勢	
嚴格數學定義	$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$	
正負約定	【右手定則】： ① 順時針方向轉動= <u>負</u> 力矩 ② 逆時針方向轉動= <u>正</u> 力矩	
條 件	力矩=力×力臂(moment arm)	力矩=有效力×距離
圖 解	 $\tau = (r \cdot \sin \theta) F$	 $\tau = r(F \sin \theta)$ 有效力
延伸定義	力臂=力到支點的垂直距離	有效力=垂直距離方向的分力

P.42

030304 **力偶矩(moment of couple)**

1. 等大小、反方向且不共線的兩平行力，對物體所造成的力矩稱為力偶矩。
2. 應用：水龍頭、方向盤、腳踏車、螺絲、.....。
3. 力偶矩與支點的選取無關。



030501 天平

1、基本原理：槓桿原理

2、必須有重力場，才能使用，但是量測的結果與重力場的大小無關

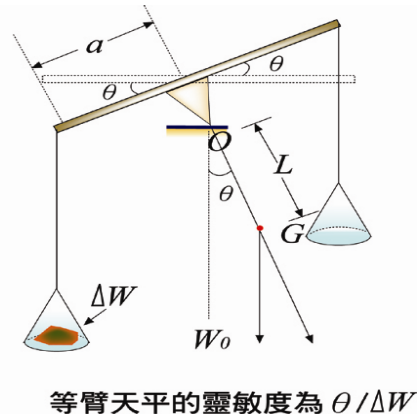
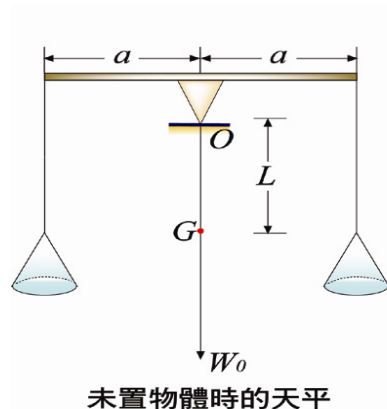
3、靈敏度的感覺：

❶ 若在稱盤中放一__ (恐龍) __，天平只偏轉 1 度，表示此天平的靈敏度極差；

❷ 若在稱盤中放一__ (草履蟲) __，天平就偏轉 10 度，表示此天平的靈敏度極高。

4、靈敏度的定義 ➡ 放一 ΔW 重物，偏轉的角度 $\Delta\theta$ = 每單位質量偏轉的角度。

5、數學推導：



$$\Delta W \times a \cos \theta$$

$$= W_0 \cdot L \cdot \sin \theta$$

$$\therefore \Delta W \times a = W_0 \tan \theta$$

$$\frac{a}{L \cdot W_0} = \frac{\tan \theta}{\Delta W} = \frac{\theta}{\Delta W}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \text{ 且 } \sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta$$

第三章 靜力平衡 詳解

範例 01：

【解析】：

【(1)之解法(一)→分別分析人與平台】：

Step1：選擇適當的受力物→分析「人」

Step2：分析受力，畫出力圖→人共受重力 mg 、張力 T 、平台對人的正向力 N

Step3：分析力造成何種結果，列方程式→此三力成平衡，故列合力=0

$$N + T = mg$$

Step1：選擇適當的受力物→分析「平台」

Step2：分析受力，畫出力圖→平台共受重力 Mg 、張力 T 、人對平台正向力 N

Step3：分析力造成何種結果，列方程式→此三力成平衡，故列合力=0

→人對平台施力 N 、平台對人施力 N ，兩者是一組作用與反作用力

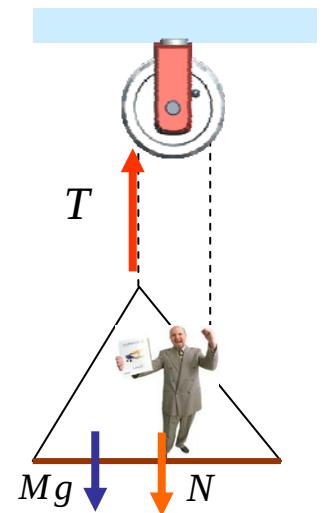
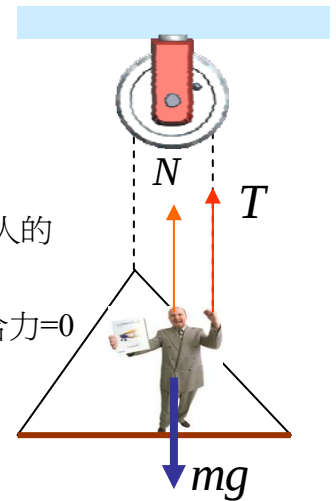
$$T = mg + N$$

$$T \leq mg$$

(若 $T > mg$ ，人會被拉出去)

$$\frac{1}{2}(M + m)g \leq mg$$

$$\therefore M \leq m$$



【(1)之解法(二)→分析人與平台之系統】：

Step1：選擇適當的受力物→分析「人+平台」的系統

Step2：分析受力，畫出力圖→系統共受重力 $(M+m)g$ 、張力 $2T$

Step3：分析力造成何種結果，列方程式

→此二力成平衡，故列合力=0

→果將人與平台視為一系統，則人對平台施力 N 、平台對人施力 N ，兩者是系統間的內力

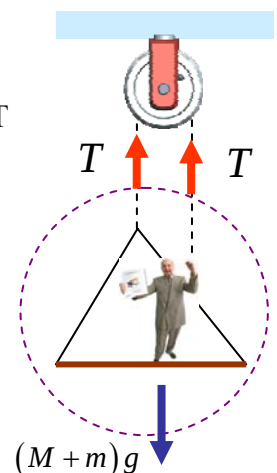
(1)+(2)

$$\begin{cases} N + T = mg \\ T = mg + N \end{cases}$$

$$\begin{cases} N + T = mg \\ T = mg + N \end{cases}$$

$$2T = (M + m)g$$

$$T = \left(\frac{M + m}{2} \right) g$$



【(2)之解析→分析人與平台之系統】：

Step1：選擇適當的受力物→分析「人+平台」的系統

Step2：分析受力，畫出力圖→系統共受重力 $(M+m)g$ 、張力 $2T$

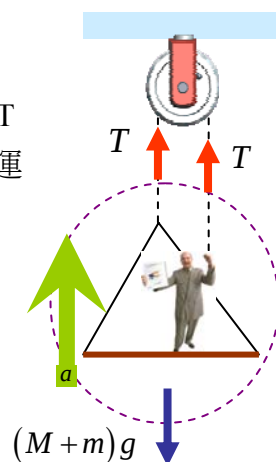
Step3：分析力造成何種結果，列方程式→此系統做等加速度運動，故列 $\Sigma F=ma$

若有加速度

$$2T = (M + m)(a + g)$$

$$2T - (M + m)g = (M + m)a$$

$$T = \frac{1}{2}(M + m)(a + g)$$



範例 02：

【解析】：

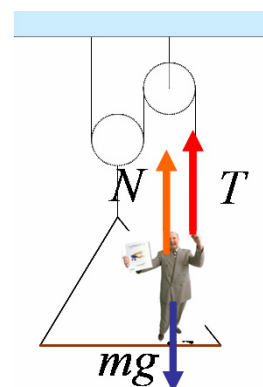
【(1)之解法(一)→分別分析人與平台】：

Step1：選擇適當的受力物→分析「人」

Step2：分析受力，畫出力圖→人共受重力 mg 、張力 T 、平台對人的正向力 N

Step3：分析力造成何種結果，列方程式→此三力成平衡，故列合力=0

$$N + T = mg$$



Step1：選擇適當的受力物→分析「平台」

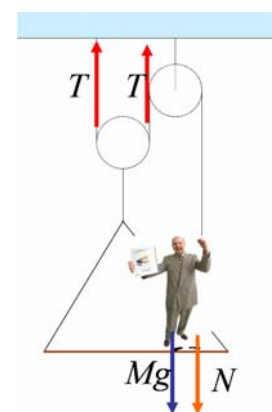
Step2：分析受力，畫出力圖→平台共受重力 Mg 、張力 $2T$ 、人對平台正向力 N

Step3：分析力造成何種結果，列方程式

→此三力成平衡，故列合力=0

→人對平台施力 N 、平台對人施力 N ，兩者是一組作用與反作用

$$2T = Mg + N$$

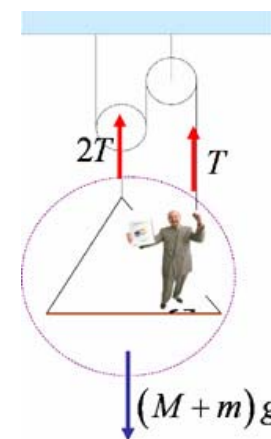


【(1)之解法(二)→分析人與平台之系統】：

Step1：選擇適當的受力物→分析「人+平台」的系統

Step2：分析受力，畫出力圖→系統共受重力 $(M+m)g$ 、張力 $3T$

Step3：分析力造成何種結果，列方程式→此二力成平



衡，故列合力=0

➡如果將人與平台視為一系統，則人對平台施力 N、平台對人施力 N，兩者是系統間的內力

$$\begin{cases} N + T = mg \\ 2T = Mg + N \end{cases} \quad 3T = (M + m)g \quad T = \frac{1}{3}(M + m)g$$

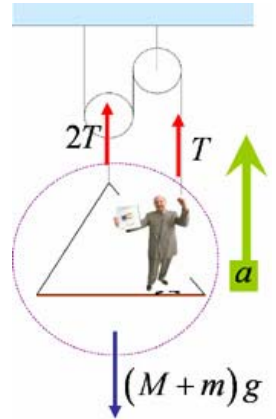
【(2)之解析➡分析人與平台之系統】：

Step1：選擇適當的受力物➡分析「人+平台」的系統

Step2：分析受力，畫出力圖➡系統共受重力 $(M+m)g$ 、張力 $3T$

Step3：分析力造成何種結果，列方程式➡此系統做等加速度運動，故列 $\Sigma F=ma$

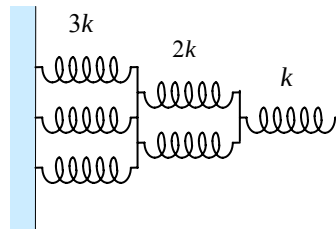
$$\begin{aligned} 3T - (M + m)g &= (M + m)a \\ 3T &= (M + m)(g + a) \\ T &= \frac{1}{3}(M + m)(g + a) \end{aligned}$$



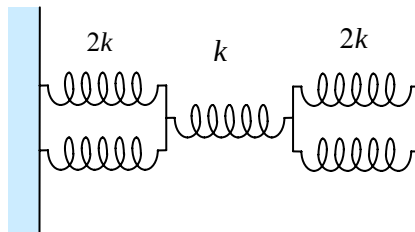
範例 03：

【解析】：

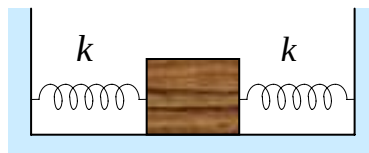
$$\begin{aligned} (1) \quad k' &= \frac{1}{\frac{1}{3k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}} \\ &= \frac{6}{11}k \end{aligned}$$



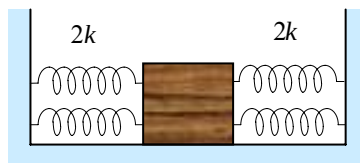
$$(2) \quad k' = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}} k = \frac{1}{2}k$$



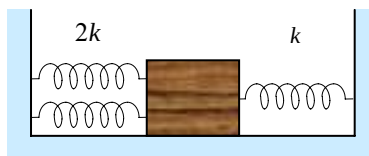
$$(3) \quad k' = 2k$$



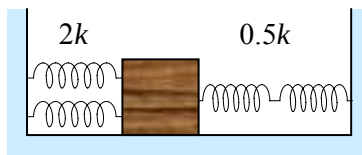
$$(4) \quad k' = 4k$$



(5) $k' = 3k$



(6) $k' = \frac{5}{2}k$



範例 04：

【解析】：(1) $F = kx \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{5 \times 9.8}{7 \times 10^{-2}} = 700 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

(2) $28 \times 2 = 56 \text{cm}$

(3) $7 \div 2 = 3.5 \quad 21 + 3.5 = 24.5$

範例 05：

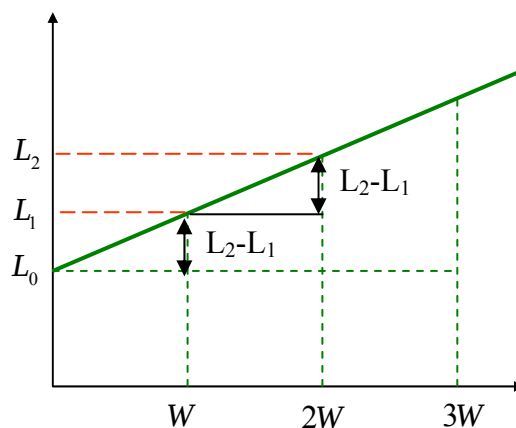
【解析】：

$$\begin{cases} W = k(L_1 - L_0) \\ 2W = k(L_2 - L_0) \end{cases}$$

(1) $L_0 = L_1 - (L_2 - L_1)$
 $= 2L_1 - L_2$

(2) $F = k\Delta x$
 $k = \frac{F}{x} = \frac{W}{L_2 - L_1}$

(3) $L_0 + 3(L_2 - L_1)$
 $= (2L_1 - L_2) + 3L_2 - 3L_1$
 $= 2L_2 - L_1$



範例 06：

【解析】：(1) $10 = 100 \cdot \Delta x$
 $\Delta x = 0.1\text{m}$

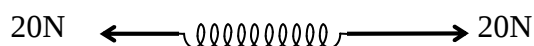
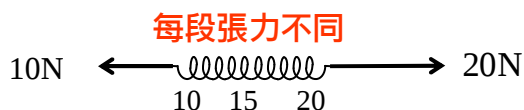
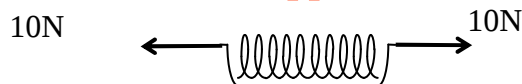
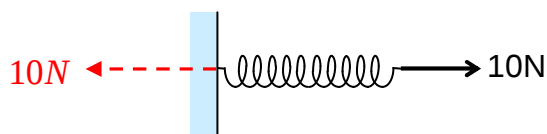
(2) 0.1m

(3)

$$\frac{0.2 + 0.1}{2} = 0.15\text{m}$$

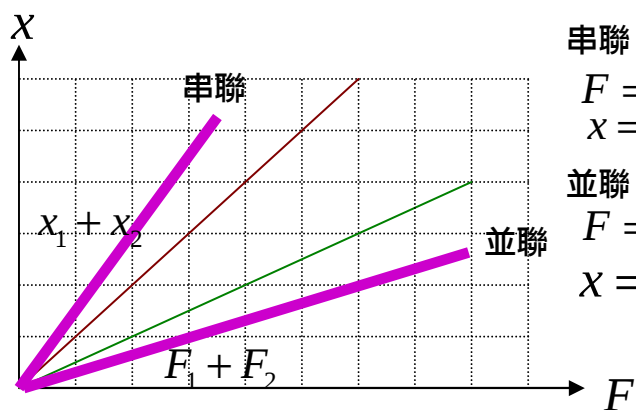
$$\frac{10 + 20}{2} = 0.15\text{m}$$

(4) 0.2m



範例 07：

【解析】：



串聯

$$F = F_1 = F_2$$

$$X = X_1 + X_2$$

並聯

$$F = F_1 + F_2$$

$$X = X_1 = X_2$$

範例 08：

解題思路

└─ 串聯後的彈力常數會變__小__；並聯後的彈力常數會變__大__。

【解答】：(A)(D)(E)

【解析】：故 k_1 是串聯的彈力常數 →

$$k_1 = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

k_4 是並聯的彈力常數 →

$$k_4 = k_2 + k_3$$

$$k_1 = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \Rightarrow k_1 (k_2 + k_3) = k_2 k_3$$

$$\Rightarrow k_1 k_4 = k_2 k_3$$

範例 09：

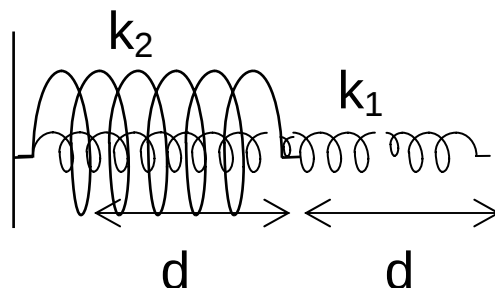
解題思路

└─ 虎壓縮 $2d$ ， k_1 彈簧被壓縮__ $2d$ __、 k_2 彈簧被壓縮__ d __

【解答】：(B)

【解析】：

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = k_1 \cdot 2d + k_2 \cdot d \\ &= k_1 d + (k_1 + k_2) d \end{aligned}$$



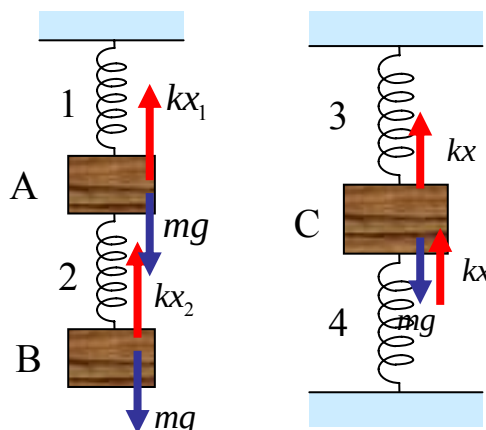
範例 10：

【解析】：

(1) 欲解 x_1 ，分析__A+B__ $kx_1 = 2mg \quad \therefore x_1 = \frac{2mg}{k}$

(2) 欲解 x_2 ，分析__B__ $kx_2 = mg \quad \therefore x_2 = \frac{mg}{k}$

(3) $x_3 = x_4$ ，分析 C $2kx_3 = mg \quad \therefore x_3 = \frac{mg}{2k}$



範例 11：

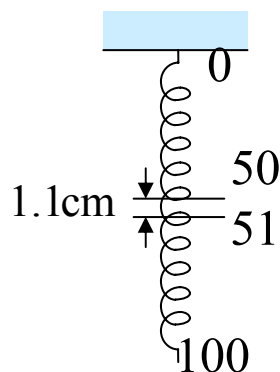
【解答】：(D)

【解析】：

$$\frac{2.1}{2} = 1.05 \text{ (1格)}$$

$$1.05 < 1.1$$

所以必在 51 之下



範例 12：

【解析】：

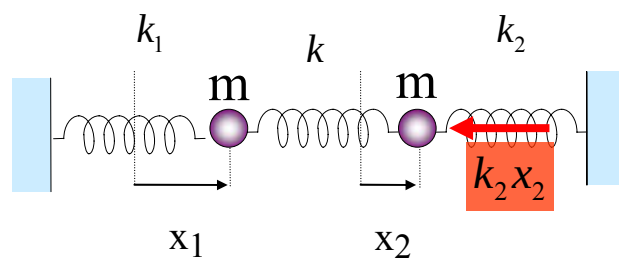
$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2$$

設 $x_1 > x_2 \rightarrow \therefore$ 壓縮

$\therefore$ 中間： $k(x_1 - x_2)$

設 $x_1 < x_2 \rightarrow \therefore$ 伸長

$\therefore$ 中間： $k(x_2 - x_1)$



範例 13：

【解析】：(1) $2k \cdot x = 10$

$$2 \cdot 2 \cdot x = 10$$

$$x = 2.5 \text{ cm}$$

(2) 設 $x > 10 \text{ cm} \rightarrow$ 表壓縮b

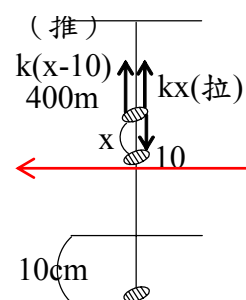
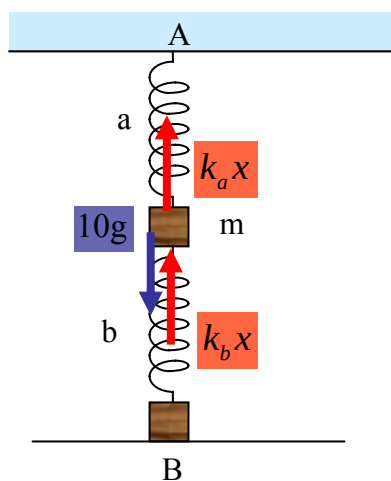
$$k(x - 10) + kx = 10$$

$$2kx - 10k = 10$$

$$4x - 20 = 10$$

$$x = 7.5 \text{ cm}$$

Ans. 27.5cm



範例 14：

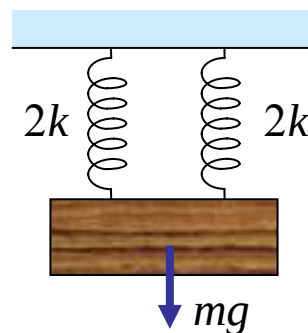
①彈簧分割，彈力常數與長度成反比。此題，長度變為一半，故彈力常數變為 2k

②彈簧並聯，彈力常數 4k。

【解析】： $mg = k \cdot \Delta L$

$$mg = 4k \cdot \Delta \ell'$$

$$\Delta \ell' = \frac{mg}{4k} = \frac{\Delta L}{4}$$



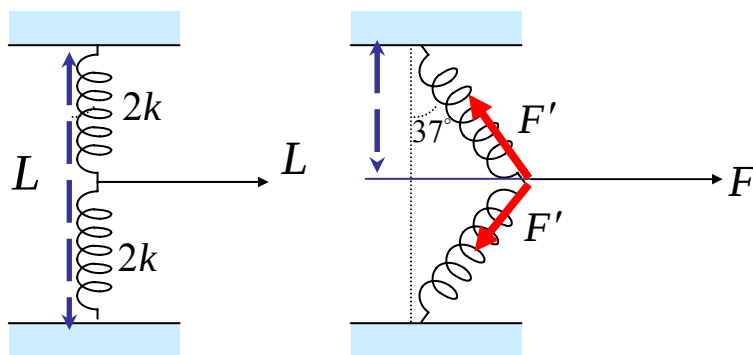
範例 15：

【解析】：

$$\frac{L}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8}L$$

$$\therefore \Delta L = \frac{5}{8}L - \frac{1}{2}L = \frac{1}{8}L$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= 2 \times \left(2k \cdot \frac{1}{8}L \right) \times \cos 53^\circ = \frac{kL}{2} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{10}kL \end{aligned}$$



範例 16：

【解析】：(A)三力成平衡，力的作用線必交於同一點，否則會產生力矩而轉動

(C)(D)(E)三角形的邊長關係：

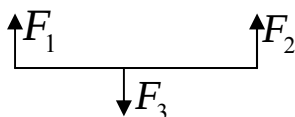
①兩邊和>第三邊

②兩邊差<第三邊

【進階思考】：如果題目改為作用於一物體之三力成平衡，則：

Ans. (B)任兩力之合力必與第三力大小相等，方向相反

反例：



(A)三力之作用線必通過同一點

(C)三力的向量構成封閉三角形

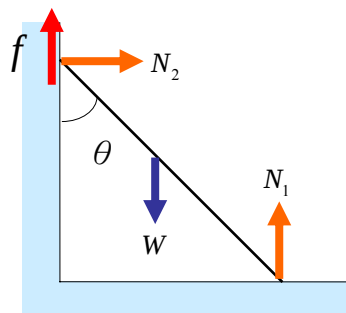
(D)任一力之大小，必等於另兩力大小之和

(E)任一力之大小，必等於另兩力大小之差。

範例 17：

【解答】：(D)

【解析】：(D)無論如何不能保持平衡



範例 18：

【解析】：

【解法(一)：解析法】 ➡ 水平方向合力=0；鉛直方向合力=0

$$\begin{cases} T \cos \theta = W \\ T \sin \theta = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{W}{\cos \theta} \\ N = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} W = W \tan \theta \end{cases}$$

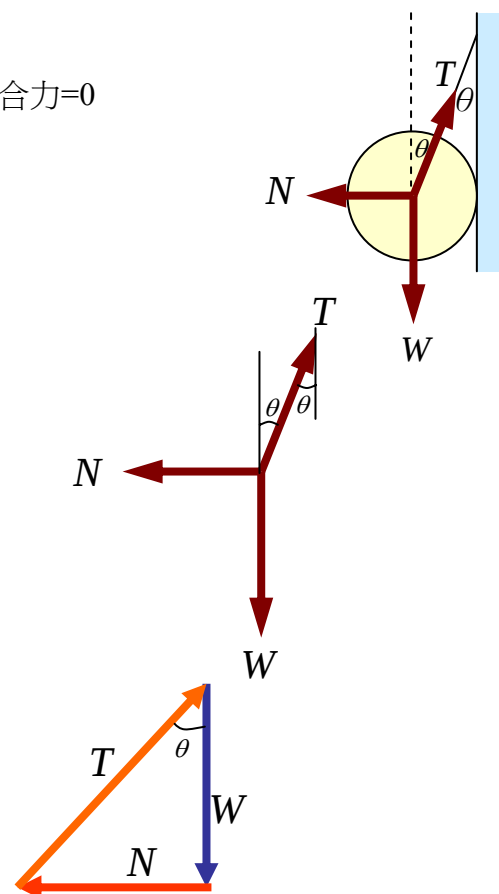
【解法(二)：拉密定理】

$$\frac{W}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{N}{\sin(180^\circ - \theta)}$$

【解法(三)：封閉三角形】

$$\therefore N = W \tan \theta$$

$$T = W \sec \theta = \frac{W}{\cos \theta}$$



範例 19：

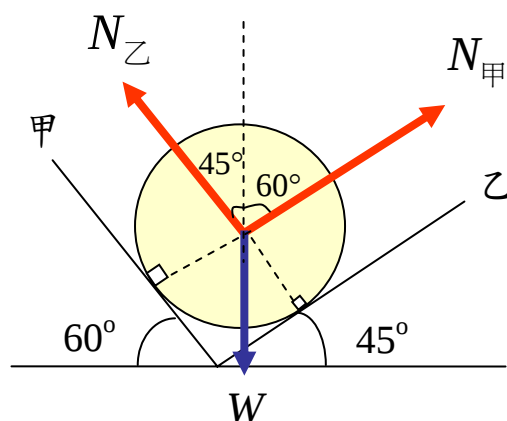
【解析】：

$$\frac{W}{\sin 105^\circ} = \frac{N_{\text{甲}}}{\sin 135^\circ} = \frac{N_{\text{乙}}}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{W}{\sin 75^\circ} = \frac{N_{\text{甲}}}{\sin 45^\circ} = \frac{N_{\text{乙}}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore N_{\text{甲}} = \frac{2\sqrt{2}W}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = (\sqrt{3} - 1)W$$

$$\therefore N_{\text{乙}} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}W$$



範例 20：

【解析】：

(1) $N_1 = 160\text{N}$

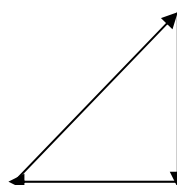
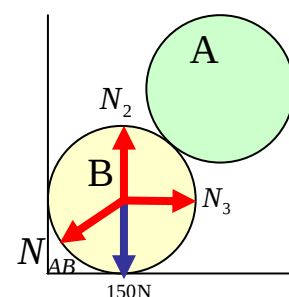
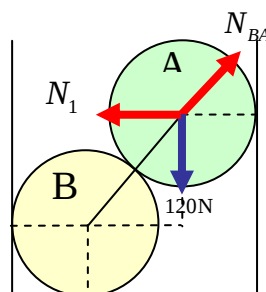
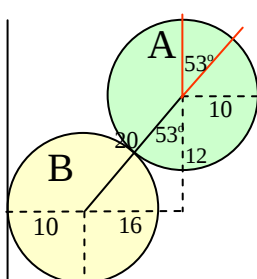
(2) $N_{\text{BA}} = 200\text{N}$

(3)

$$N_3 = N_{\text{BA}} \sin 53^\circ$$

$$= 200 \times \frac{4}{5} = 160\text{N}$$

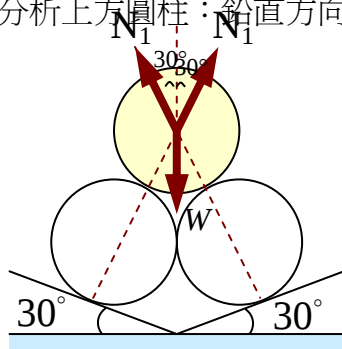
$$N_2 = 150 + 200 \times \frac{3}{5} = 270\text{N}$$



範例 21：

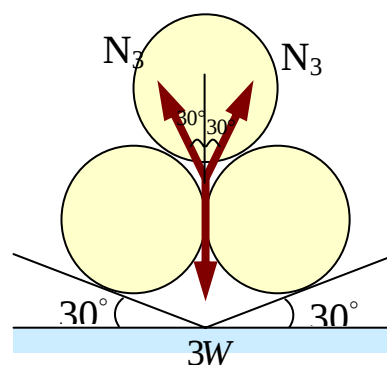
【解析】：

(1) 分析上方圓柱：鉛直方向合力=0 $\Rightarrow W = 2N_1 \cos 30^\circ \Rightarrow N_1 = \frac{W}{\sqrt{3}}$



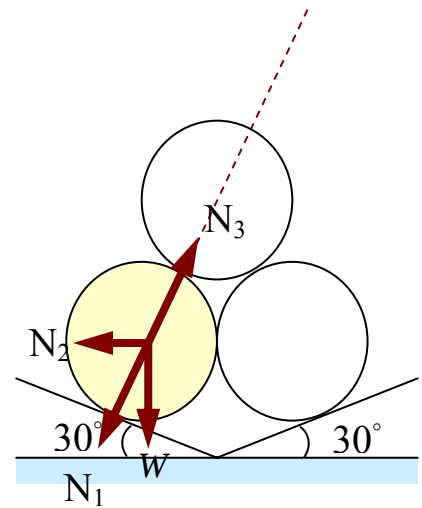
(3) 分析三根圓柱之系統：鉛直方向合力=0 $\Rightarrow$

$$3W = 2N_3 \cos 30^\circ \Rightarrow N_3 = \sqrt{3}W$$



(2)分析左下方圓柱：水平方向合力=0 ➡

$$N_1 \sin 30^\circ + N_2 = N_3 \sin 30^\circ \Rightarrow N_2 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$



範例 22：

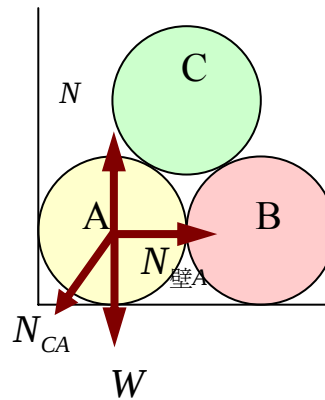
【解析】：

$$N_{AC} = N_{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} W$$

$$N_{\text{底}A} = \frac{3}{2} W$$

$$N_{\text{壁}A} = \frac{1}{2\sqrt{3}} W$$

$$N_{AB} = 0$$



範例 23：

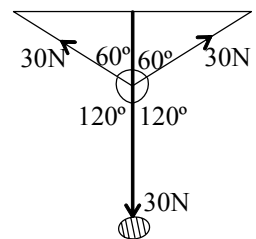
解題思路

由拉密定理，三力相等且成平衡， θ 必為 120 度

【解析】：

$$50 \times \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}$$

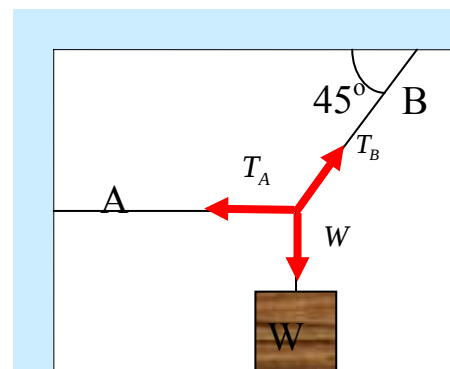
$$25\sqrt{3} \times 2 = 50\sqrt{3}$$



範例 24：

【解析】： $T_A = W$

$$T_B = \sqrt{2} W$$



範例 25：

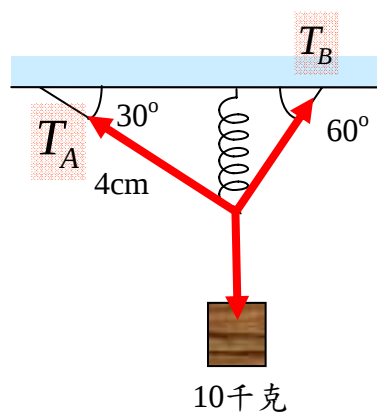
【解析】： $7840 \text{ N/m} = 800 \text{ kg/m} = 8 \text{ kg/cm}$

$$F = k\Delta x = 8 \cdot 0.5 = 4 \text{ (kg)} \uparrow$$

$$\text{合力} = 10 - 4 = 6 \text{ kg} \downarrow$$

$$T_B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (kg)}$$

$$T_A = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ (kg)}$$



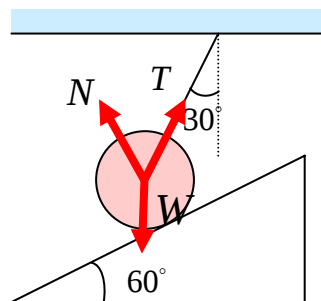
範例 26：

【解析】：

$$\frac{W}{1} = \frac{N}{\frac{1}{2}} = \frac{T}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore N = \frac{1}{2}W$$

$$\therefore T = \frac{\sqrt{3}}{2}W$$



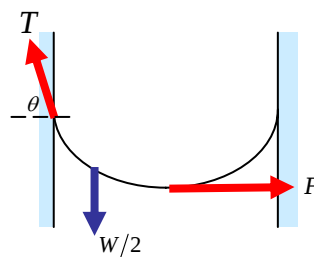
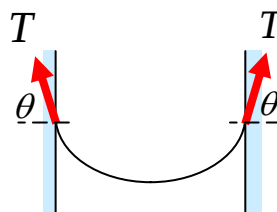
範例 27：

【解析】： (1) $2T \sin \theta = W$

$$T = \frac{W}{2} \csc \theta$$

(2)

$$F = T \cos \theta = \frac{W \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{W}{2} \cot \theta$$



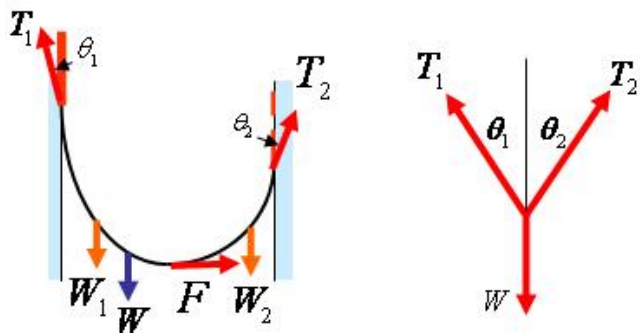
範例 28 :

【解析】：(1)

$$\frac{W}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{T_1}{\sin \theta_2} = \frac{T_2}{\sin \theta_1}$$

(2)

$$F = T_1 \sin \theta_1 = \frac{W \cdot \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \sin \theta_1$$



範例 29：

【解析】：C

範例 30：

【解析】：(1) $\mu_s = \tan \theta_s = \frac{3}{4} \quad \therefore \theta_s = 37^\circ$

$$a = \frac{mg \cdot \sin \theta - f_k}{m} = \frac{mg \cdot \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta}{m}$$

$$(2) \quad = g \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{2}{5} g = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4 \text{ m/s}^2$$

$$(3) \quad \mu_k = \tan \theta_k$$

$$\frac{1}{4} = \tan \theta_k$$

$$\therefore \theta_k = \tan^{-1} \frac{1}{4}$$

範例 31：

【解析】：(1) 20N，未達 F_{sMAX} ，推多少，受多少

(2) 30N，達 F_{sMAX}

(3) 20N，為 F_k

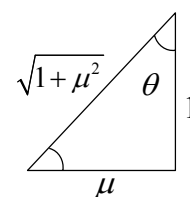
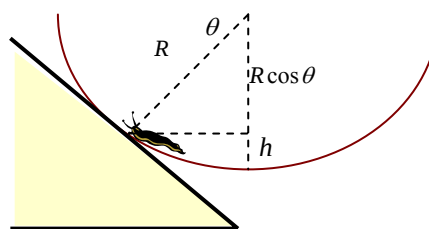
範例 32：

【解析】：

$$h = R(1 - \cos \theta)$$

$$\mu = \tan \theta$$

$$h = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right)$$



範例 33：

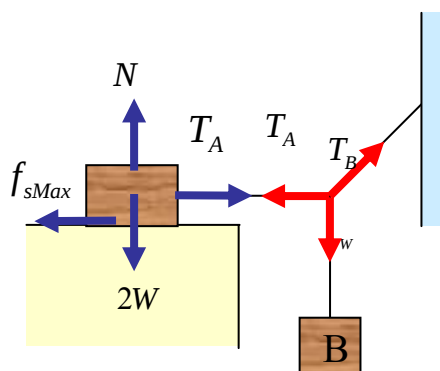
【解析】： $T_A = W$

$$T_B = \sqrt{2}W$$

$$f_{sMax} = T_A$$

$$\mu_s \cdot 2W = T_A = W$$

$$\therefore \mu_s = \frac{1}{2}$$

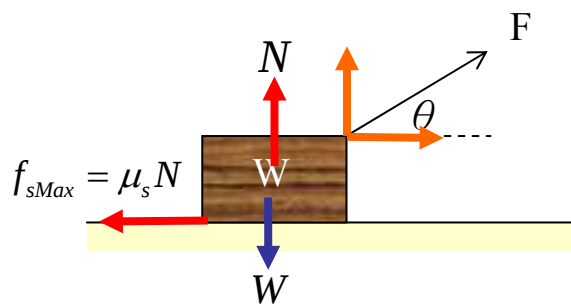


範例 34：

【解析】： $F \cdot \sin \theta + N = W$

$$F \cos \theta = \mu_s N = \mu_s (W - F \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= \frac{\mu_s \cdot W}{1 \cdot \cos \theta + \mu_s \cdot \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_s W}{\sqrt{1 + \mu_s^2} \sin(\theta + \alpha)} \geq \frac{\mu_s W}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} \end{aligned}$$



範例 35：

【解析】：(1) $f_A = (m_1 + m_2) g \mu$

$$f_B = m_2 g \mu$$

$$F = f_A$$

(2) $f_A = (m_1 + m_2) g \mu$

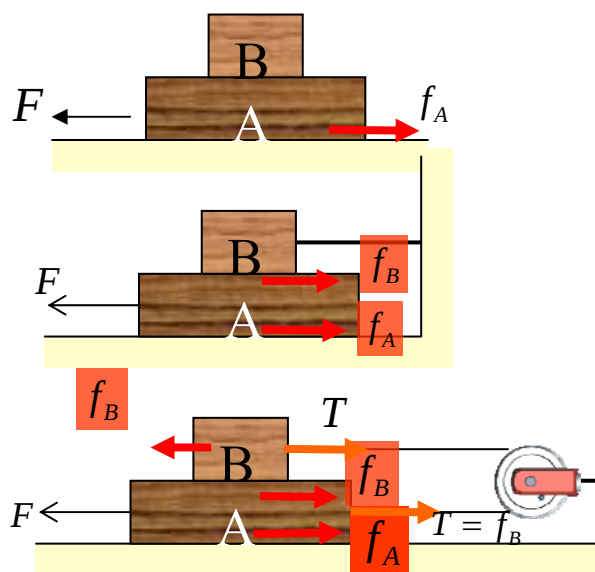
$$f_B = m_2 g \mu$$

$$F = f_A + f_B$$

(3) $F = T + f_B + f_A$

$$= (f_B) + f_B + f_A$$

$$= 2f_B + f_A$$



範例 36：

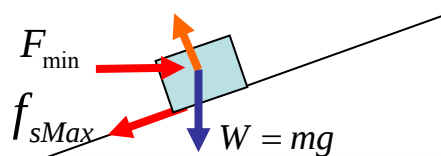
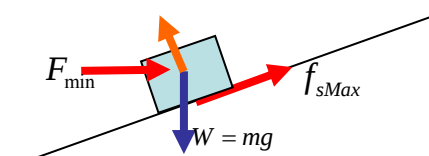
【解析】：

$$N \cos 37^\circ + 0.25N \sin 37^\circ = mg$$

$$F_{\min} + 0.25 \cdot N \cdot \cos 37^\circ = N \sin 37^\circ$$

$$N \cos 37^\circ = 0.25N \sin 37^\circ + mg$$

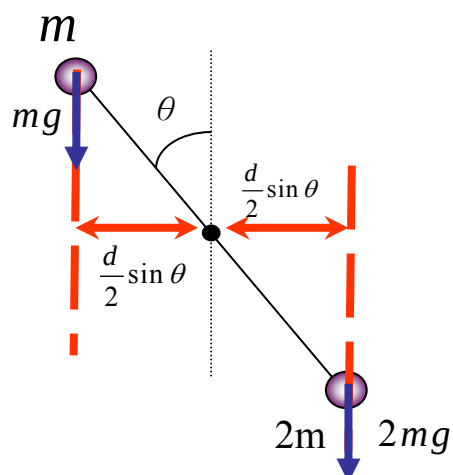
$$F_{\min} = 0.25 \cdot N \cdot \cos 37^\circ + N \sin 37^\circ$$



範例 37：

【解析】：

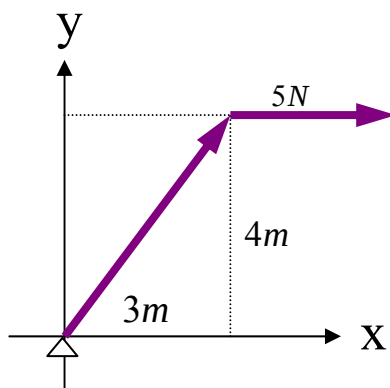
$$\begin{aligned} \sum \tau &= 2mg \left(\frac{d}{2} \sin \theta \right) - mg \left(\frac{d}{2} \sin \theta \right) \\ &= \frac{d}{2} mg \sin \theta \end{aligned}$$



範例 38 :

【解析】:

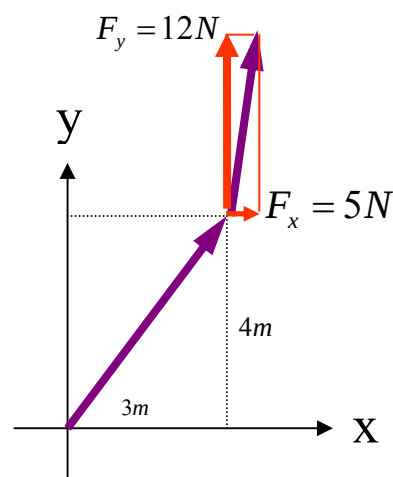
$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \bar{r} \times \bar{F} \\ &= r \cdot f \sin \theta \\ \tau &= 5 \times 4 = 20 \\ \tau &= 5 \times 5 \times \sin 53^\circ = 20\end{aligned}$$



範例 39 :

【解析】:

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 16\bar{k} = \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \bar{k}$$



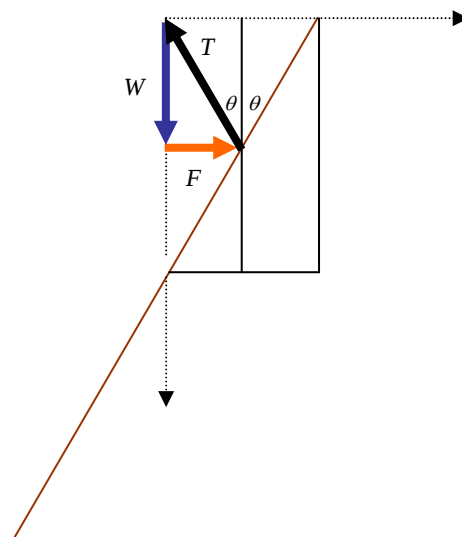
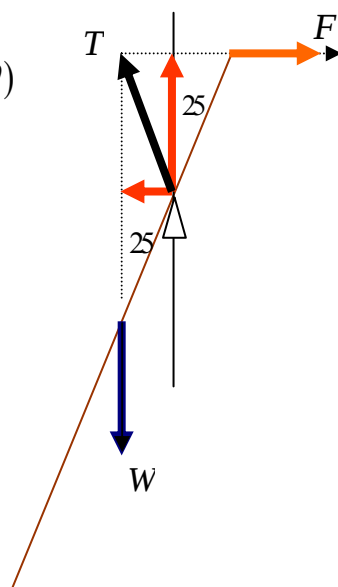
範例 40 :

【解析】:

$$\begin{aligned}F(25 \cos \theta) &= W(25 \sin \theta) \\ F &= W \tan \theta \\ T &= \sqrt{F^2 + W^2} \\ &= \sqrt{W^2 \tan^2 \theta + W^2} \\ &= \sqrt{W^2 (\tan^2 \theta + 1)} \\ &= \sqrt{W^2 \sec^2 \theta} \\ &= W \sec \theta\end{aligned}$$

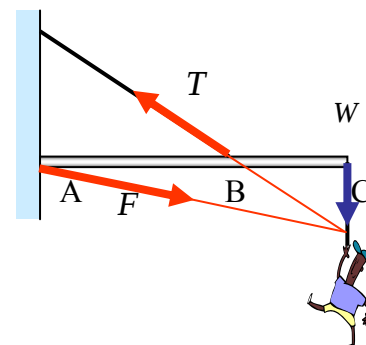
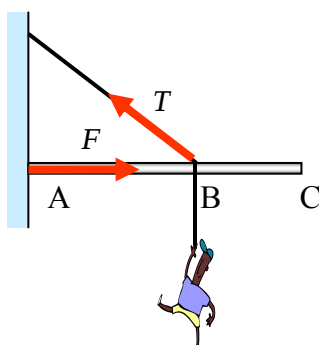
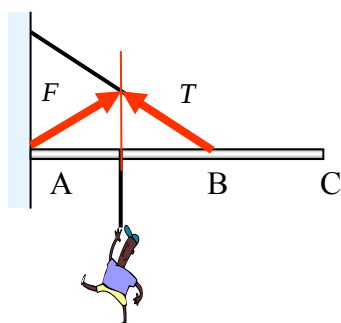
速解

$$T = W \sec \theta$$



範例 41 :

【解析】:

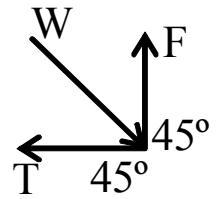
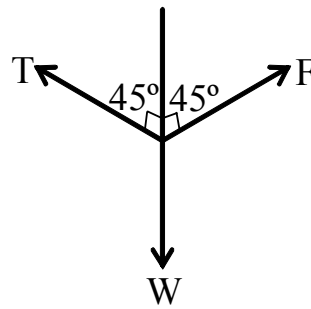
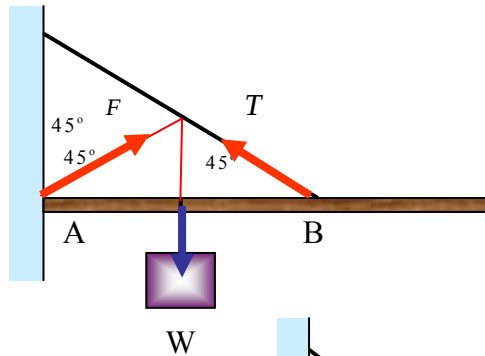


範例 42 :

【解析】:

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{T}{\sin 135^\circ} = \frac{F}{\sin 135^\circ}$$

$$\therefore T = F = \frac{\sqrt{2}}{2} W$$



範例 43 :

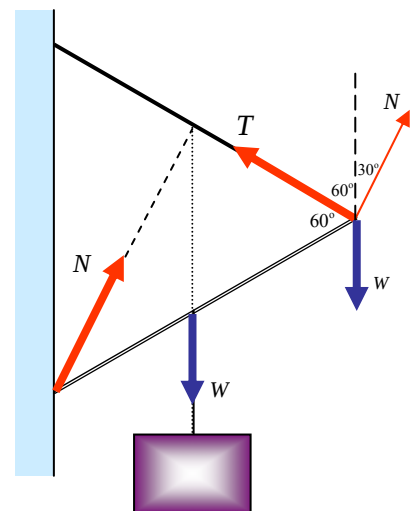
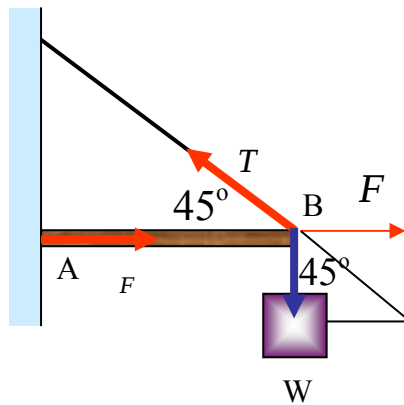
【解析】: $\therefore F = W$

$$T = \sqrt{2} W$$

範例 44 :

【解析】:

$$\frac{W}{1} = \frac{T}{1/2} = \frac{N}{\sqrt{3}/2}$$



範例 45 :

【解析】:

$$\tau = f \times r = f_k \cdot R \cdots (1)$$

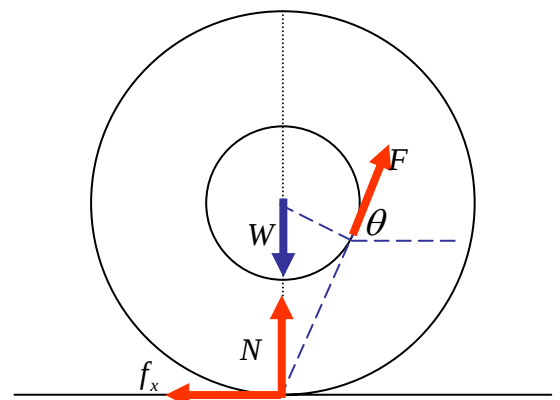
$$\text{合力: } F \sin \theta + N = W \cdots (2)$$

$$f \cos \theta = f_k \cdots (3)$$

(3)代入(1)

$$F \cdot r = F \cdot \cos \theta \cdot R$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{r}{R}$$



範例 46：

【解析】(A) no

$$F_{sMax} = 5\text{N}$$

$$F_k = 2\text{N}$$

$$F_{sMax} = 5 = \mu \cdot N = \mu \cdot 20$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{4} = 0.25$$

(B) Yes

(C) Yes

$$\tau_{\text{逆}} = \tau_{\text{正}}$$

$$\tau_N = \tau_F + \tau_{f_k}$$

$$= 2 \times 0.01 + 2 \times 0.02 = 0.06 = 20 \cdot x$$

$$\therefore x = 0.3\text{cm}$$

$$20 \times 0.3 \times 10^{-2} = 0.06 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(D) No

$$\sum F = ma$$

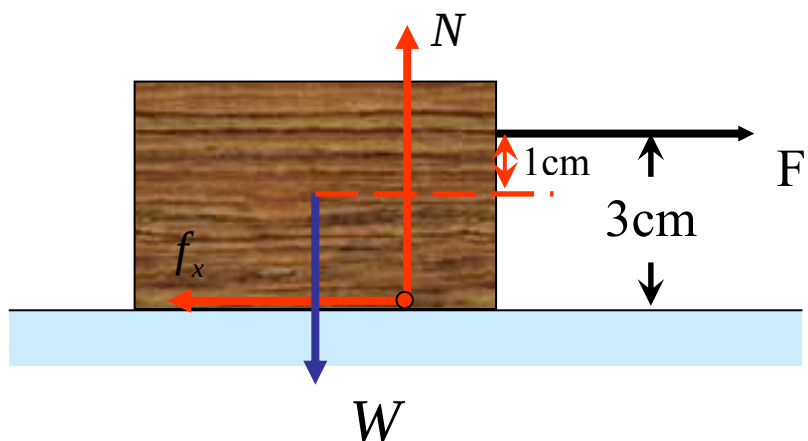
$$F - f_k = 5 - 2 = 3\text{N}$$

$$3 = ma = 2a \Rightarrow a = 1.5\text{m/s}^2$$

(E) Yes

$$a = \frac{\sum F}{m} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$v = v_0 + at = 1 + 1 \cdot 2 = 3 \text{ m/s}$$



範例 47：

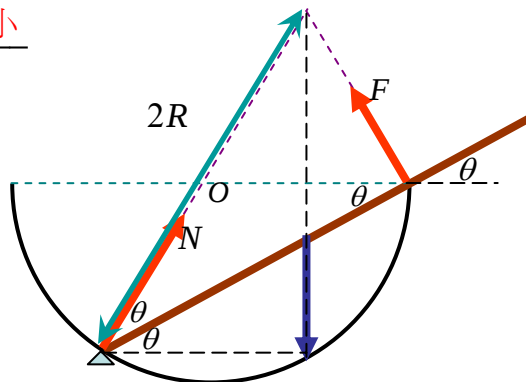
解題思路

→ 解題技巧：圖要用尺畫，圖要大,字要小

【解析】：

$$F(2R \cdot \cos \theta) = W \cdot \left(\frac{L}{2} \cos \theta \right)$$

$$F = \frac{WL}{4R}$$



範例 48：

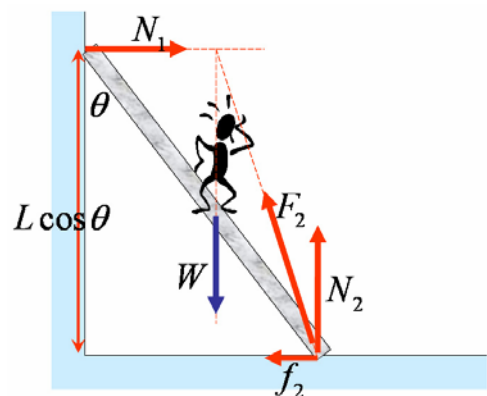
【解析】：(1)

$$N_1 \times \ell \cos \theta = W \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta$$

$$\therefore N_1 = \frac{W}{2} \tan \theta$$

(2)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{上=下} \\ \text{左=右} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_2 = W \\ N_1 = f_2 = \frac{W}{2} \tan \theta \end{array} \right. \\ F_2 &= \sqrt{N_2^2 + f_2^2} \\ &= \sqrt{W^2 + \left(\frac{W}{2} \tan \theta \right)^2} \\ &= W \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \theta} \end{aligned}$$



(3) $f_2 = \mu N_2$

$$f_{sMax} = \frac{W}{2} \tan \theta = \mu_s W$$

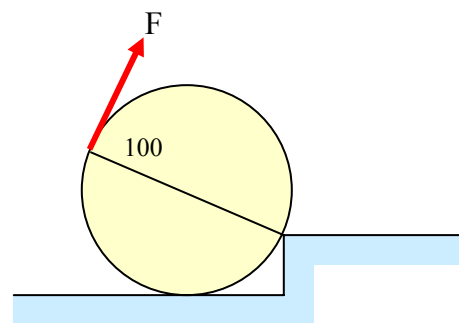
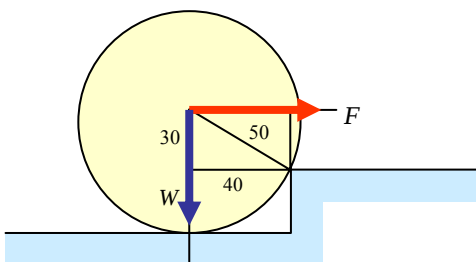
$$\therefore \frac{\tan \theta}{2} = \mu$$

範例 49：

【解析】：(1) $\tau_F \geq \tau_W$

$$F \times 30 \geq W \times 40$$

$$\therefore F \geq \frac{4}{3} W$$



(2) 沒有比對角線更長的力臂了!!

$$F \times 100 \geq W \times 40$$

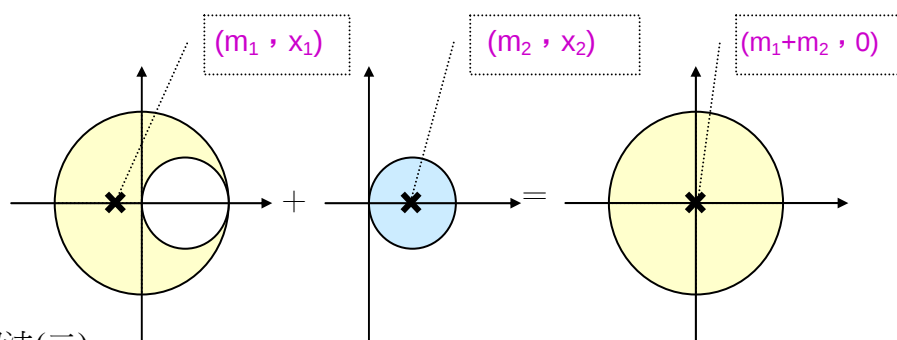
$$F \geq \frac{2}{5} W$$

範例 50：

【解析】：解法(一)

兩物體的質量與質心座標分別為 (m_1, x_1) 、 (m_2, x_2) ，合質心座標應為 $(m_1+m_2, 0)$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 = \frac{3x_1 + 1 \cdot R/2}{3+1} \therefore x_c = -\frac{R}{6}$$

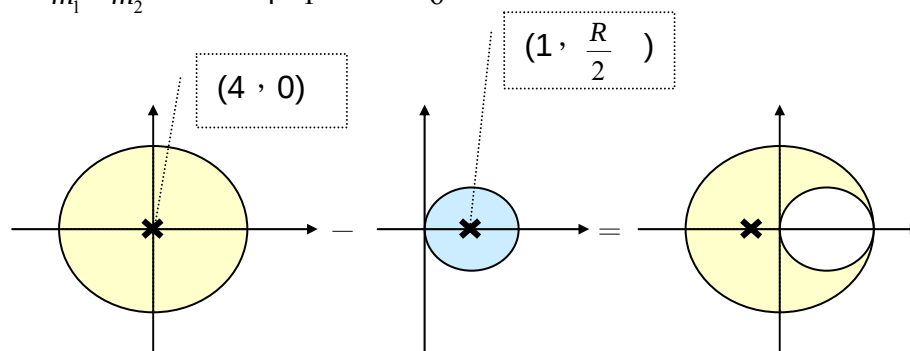


解法(二)

標準解法的應用—挖掉，就用減的。

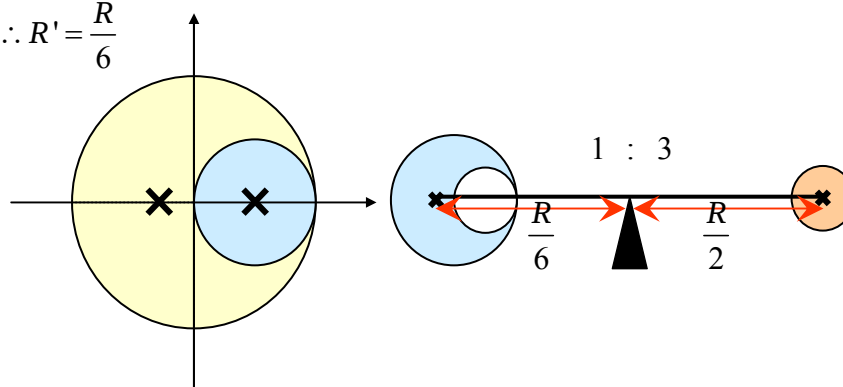
半徑比 = 2:1 質量比 = 4:1

$$x_c = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2} = \frac{4 \times 0 - 1 \cdot R/2}{4-1} = -\frac{R}{6}$$



解法(三)

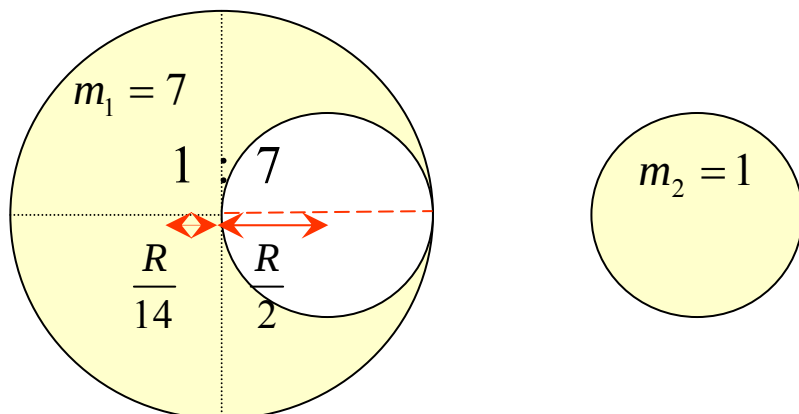
$$\frac{1}{3} = \frac{R'}{R/2} \therefore R' = \frac{R}{6}$$



範例 51：

【解析】：半徑比 = 2:1 質量比 = 8:1

$$\frac{R'}{R/2} = \frac{m}{7m} \quad \therefore R' = \frac{1}{7} \times \frac{R}{2} = \frac{R}{14}$$

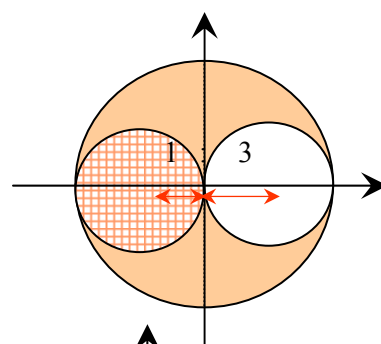
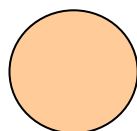
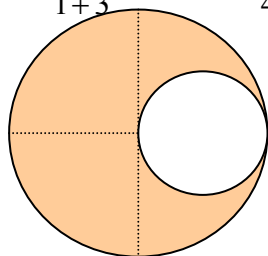


範例 52：

【解析】：

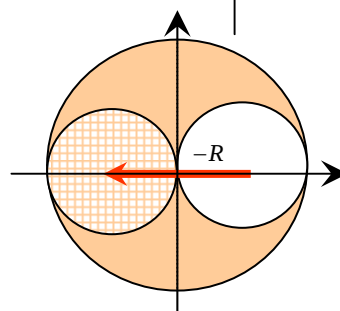
【解法一】：求合質心

$$x_c = \frac{3\left(-\frac{R}{6}\right) + 1\left(-\frac{R}{2}\right)}{1+3} = -\frac{R}{4}$$



【解法二】：質心移動型

$$\begin{aligned} \Delta x_c &= \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{3 \times 0 + 1 \times (-R)}{3+1} = -\frac{R}{4} \end{aligned}$$



【解法三】：加權平均

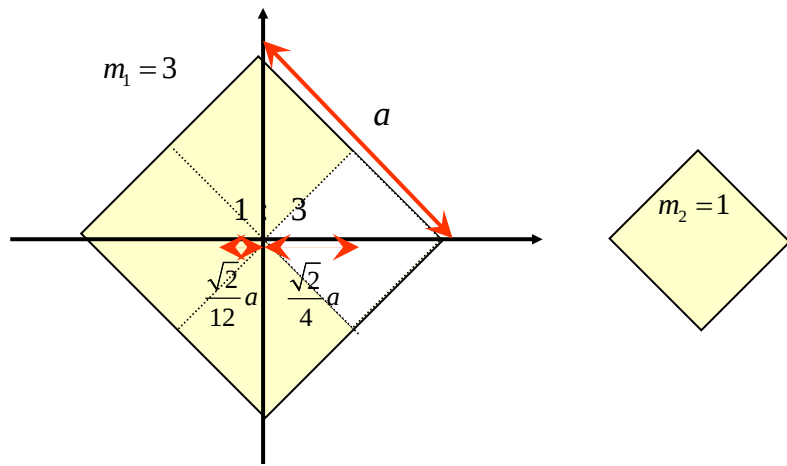
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \\ &= \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times (-R) \\ \therefore x_c &= -\frac{R}{4} \end{aligned}$$

範例 53 :

【解析】:

$$\frac{1}{3} = \frac{a'}{\sqrt{2}a/4}$$

$$\therefore a' = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

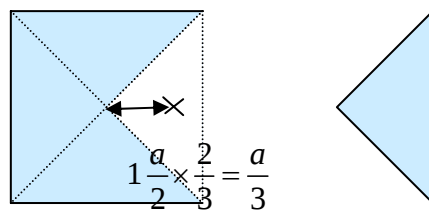


範例 54 :

【解析】:

$$\frac{1}{3} = \frac{a'}{\frac{a}{3}}$$

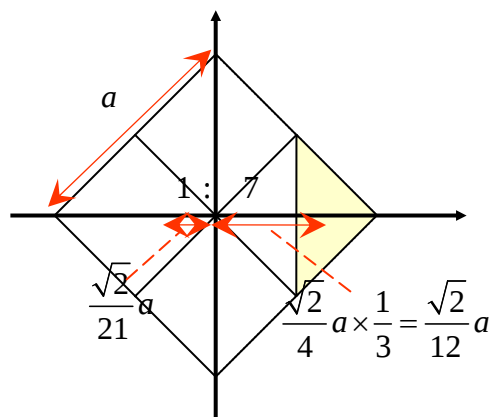
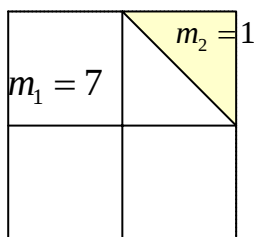
$$\therefore a' = \frac{a}{9}$$



範例 55 :

【解析】:

$$\frac{1}{7} = \frac{a'}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a} \therefore a' = \frac{4\sqrt{2}a}{12 \times 7} = \frac{\sqrt{2}}{21}a$$



範例 56：

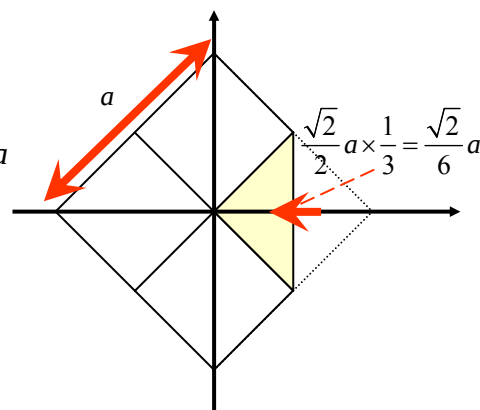
【解析】：

【解法一】：利用上一題求出剩餘的質心，再求一次合質心

$$x_c = \frac{7 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{21}a\right) + 1 \times \frac{\sqrt{2}}{6}a}{7+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{3}a + \frac{\sqrt{2}}{6}a}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{48}a$$

【解法二】：質心公式的移動型

$$x_c = \frac{7 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}a}{6}\right)}{7+1} = -\frac{\sqrt{2}a}{48}$$

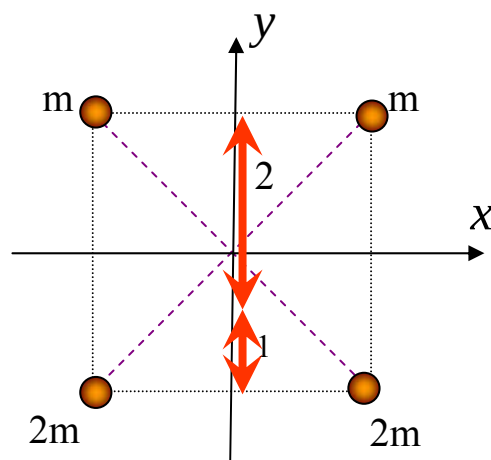


範例 57：

【解析】：因圖形左右對稱，所以 x 在中垂線上，所以 x 座標等於零

$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{m \times \frac{a}{2} \times 2 + 2m \times \left(-\frac{a}{2}\right) \times 2}{m + m + 2m + 2m} = -\frac{a}{6}$$



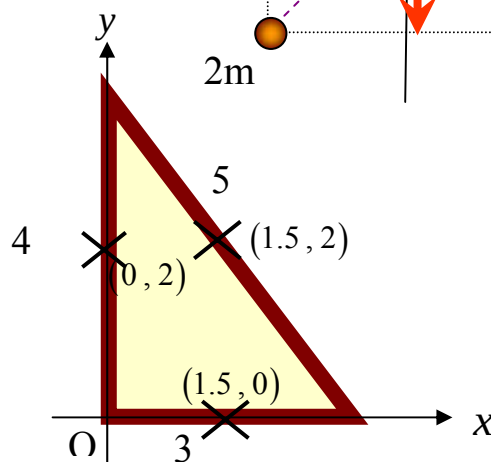
範例 58：

【解析】：

$$x_c = \frac{3 \times 1.5 + 4 \times 0 + 5 \times 1.5}{3+4+5} = 1$$

$$y_c = \frac{3 \times 0 + 5 \times 2 + 4 \times 2}{3+4+5} = \frac{18}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

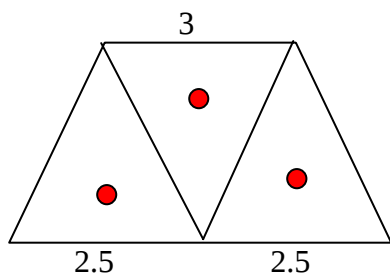
$$\therefore r_c = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$



實心木板的重心 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

範例 59：

【解析】：
$$\frac{3 \times \frac{2}{3}h + 2.5 \times \frac{1}{3}h + 2.5 \times \frac{1}{3}h}{3 + 2.5 + 2.5} = \frac{11}{24}h$$

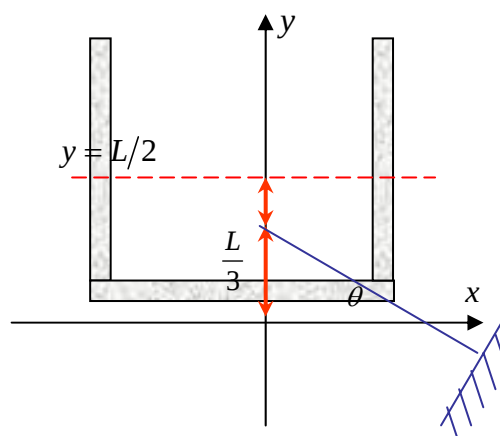


範例 60：

【解析】： $x_c = 0$

$$y_c = \frac{1 \times \frac{L}{2} + 1 \times 0 + 1 \times \frac{L}{2}}{1 + 1 + 1} = \frac{L}{3}$$

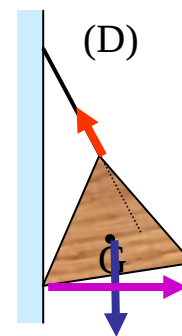
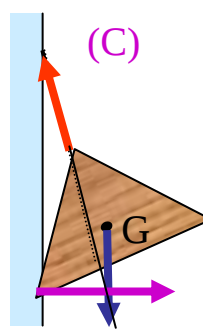
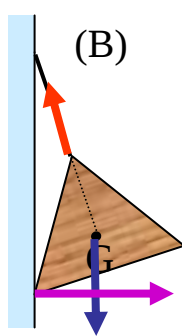
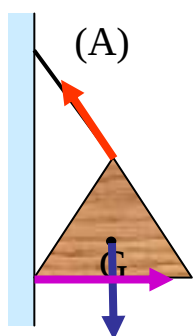
$$\tan \theta = \frac{L/3}{L/2} = \frac{2}{3}$$



範例 61：

【解答】：(C)

【解析】：



範例 62：

【解析】：將上面三木塊視為系統，此系統的質心 x 座標不能超過 L ！

故先算上面三木塊的系統質心座標

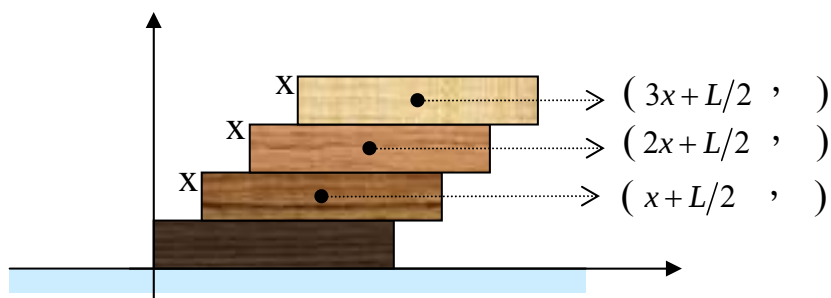
$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

基本常識：上面木塊的質心，不能超過下面一塊的長度，否則會產生力矩而轉動！

$$\frac{1 \times \left(3x + \frac{L}{2}\right) + 1 \times \left(2x + \frac{L}{2}\right) + 1 \times \left(x + \frac{L}{2}\right)}{1+1+1} \leq L$$

$$6x \leq \frac{3}{2}L$$

$$\therefore x \leq \frac{3}{2}L \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}L$$



結 論：n塊長度為L的均勻木塊，每塊最多可突出____ L/n ____，恰可維持平衡

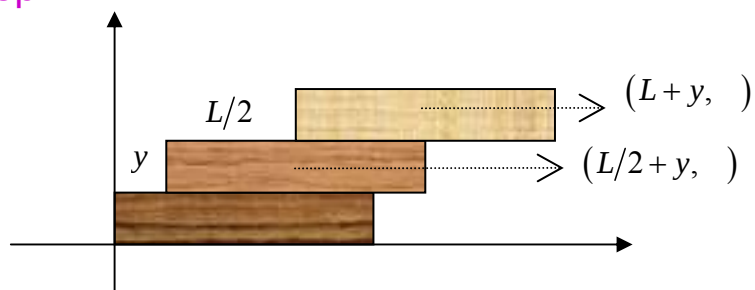
範例 63：

【解析】：

Step 1：

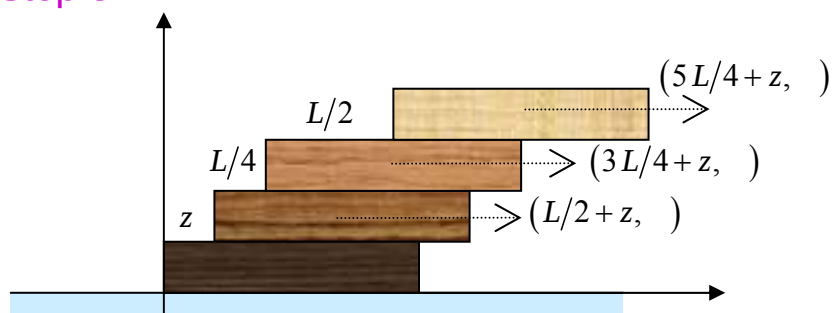


Step 2：



$$\frac{1 \times (y+L) + 1 \times (y+L/2)}{1+1} \leq L \quad \therefore y \leq \frac{L}{4}$$

Step 3：



$$\frac{1 \times \left(z + \frac{5}{4}L\right) + 1 \times \left(z + \frac{3}{4}L\right) + 1 \times \left(z + \frac{1}{2}L\right)}{1+1+1} \leq L$$

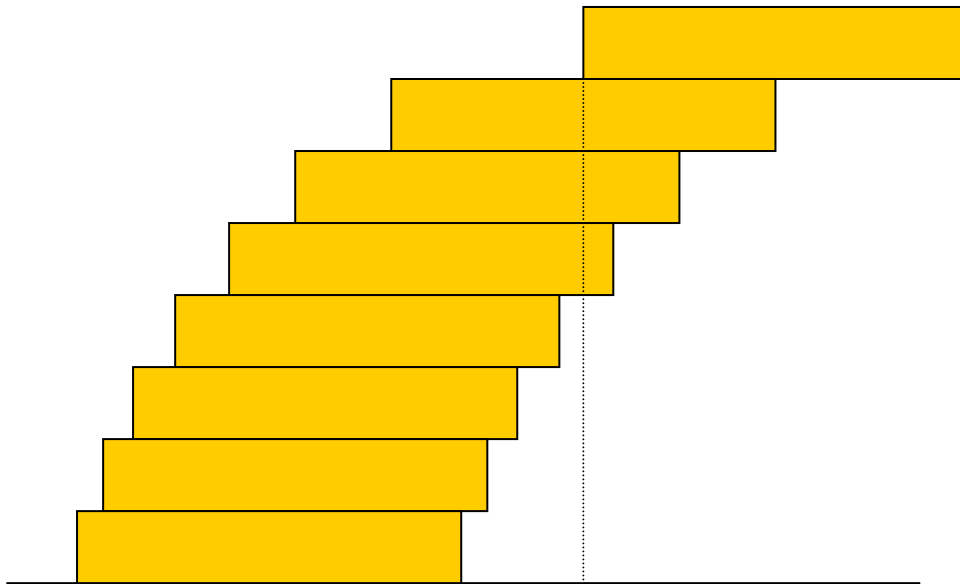
$$\therefore z \leq \frac{L}{6}$$

結 論：最上一塊突出 $L/2$ 、次一塊突 $L/4$ 、再次一塊突 $L/6$ 、第 n 塊突出 $L/2n$ 。

030419 進階思考：

有沒有可能最上一塊,完全突出於最下一塊? 有!

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \text{發散級數}$$

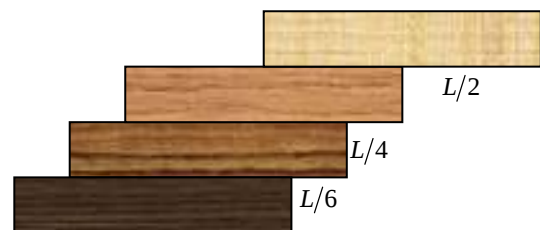


講義上的圖就是照標準比例畫的

而且只要 5 塊即可 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = 1.04167 > 1$

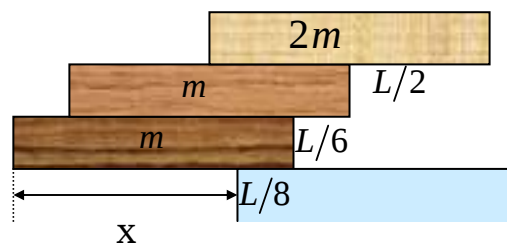
範例 64：

【解析】： $5L/6$



範例 65：

【解析】： $\frac{7L}{8}$



範例 66：

【解析】：(1)

$$\tan \theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26.56^\circ$$

(2)

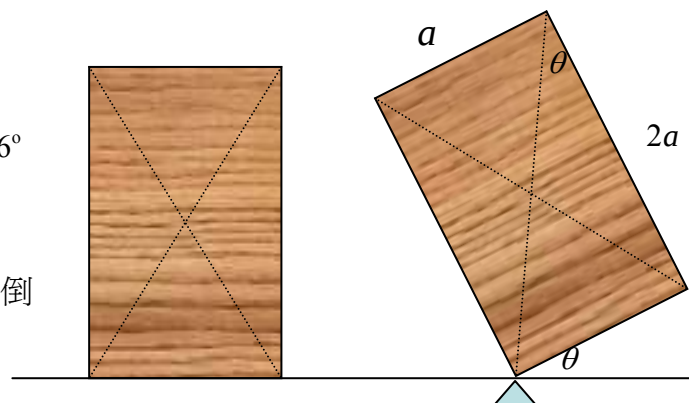
$$\mu_s = \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = 37^\circ \rightarrow \text{先倒}$$

(3)

$$\mu_s = \tan \theta = \frac{1}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{4} \rightarrow \text{先滑}$$



範例 67：

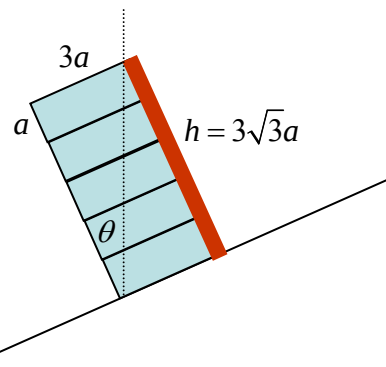
【解答】：5 塊

【解析】：

$$h = 3\sqrt{3}a$$

$$\approx 5.1a$$

$$\therefore \frac{5.1a}{a} = 5.1$$



範例 68：

【解答】：(A)(D)(E)

【解析】：略

範例 69：

【解答】：(A)(B)(D)(E)

【解析】：略

範例 70：

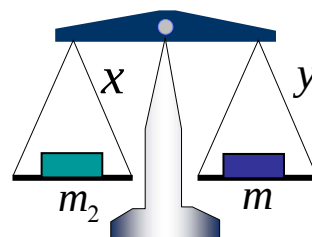
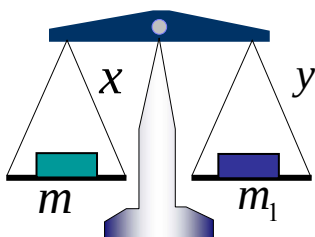
【解析】：

$$\begin{cases} m_1 + y = m + x \\ m_2 + x = m + y \end{cases}$$

$$m_1 - m = m - m_2$$

$$m_1 + m_2 = 2m$$

$$\therefore m = \frac{m_1 + m_2}{2}$$



範例 71：

【解析】：

不等臂

$$\begin{cases} mL_1 = m_1 L_2 \\ m_2 L_1 = m L_2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m} \Rightarrow m^2 = m_1 m_2$$

$$\therefore m = \sqrt{m_1 m_2}$$

範例 72：

【解析】：

1. 不等臂

$$\begin{cases} mL_1 = m_1 L_2 \\ m_2 L_1 = m L_2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m} \Rightarrow m^2 = m_1 m_2$$

$$\therefore m = \sqrt{m_1 m_2}$$

2. 不等重

$$xL_1 = yL_2$$

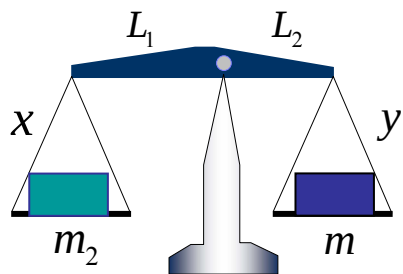
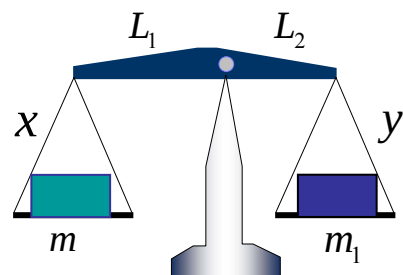
$$(m + x)L_1 = (m_1 + y)L_2$$

$$(m_2 + x)L_1 = (m + y)L_2$$

$$\frac{mL_1 = m_1 L_2}{m_2 L_1 = m L_2}$$

$$\Rightarrow m^2 = m_1 m_2$$

$$\therefore m = \sqrt{m_1 m_2}$$



範例 73 :

【解析】:

$$W_1(x+y) = W \cdot x$$

$$W_2(x+y) = W \cdot y$$

$$(W_1 + W_2)(x+y) = W \cdot (x+y)$$

$$\therefore W = W_1 + W_2$$

