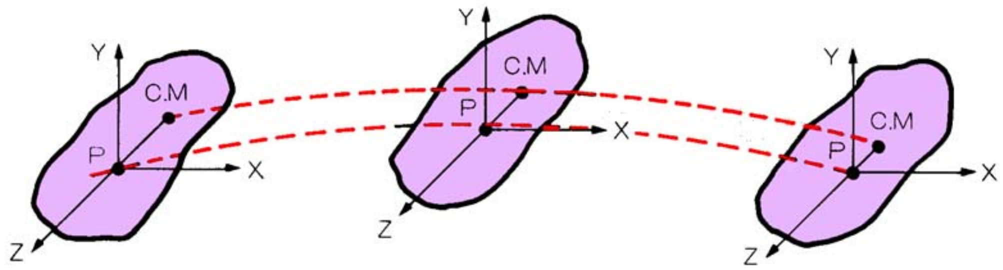
8-0 物體運動的形態

Here 轉動學→物體基本運動

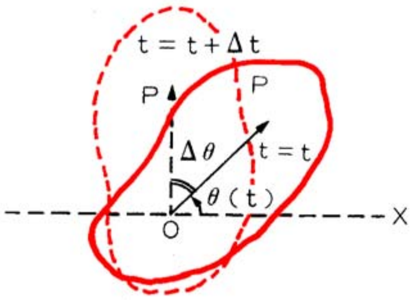
080001 物體的運動形態

種類	移　動	轉　動	振　動
意義	物體中每一點的運動軌跡皆與質心相同	物體中的每一點與轉軸之連線的角度隨時間而改變	物體中任兩點的相對位置會隨時間而改變

【移動】:



【轉動】:



【振動】:

080002 剛體

----物體在運動或靜止時，其內部各點的相對距離永遠保持不變

----即物體<u>不產生形變</u>，不產生振動

----在運動學與轉動學中討論的對象都是剛體

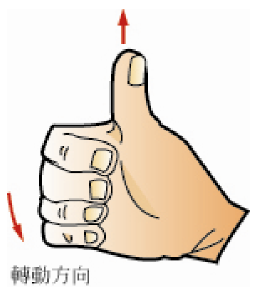
8-1 角速度與角加速度

Here 轉動學→基本物理量對照表

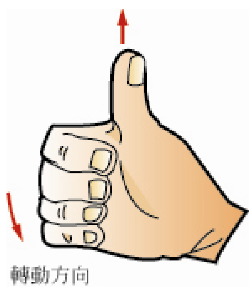
080101 物理量：

平移物理量		轉動物理量	
	位移	角位移	
	速度	角速度	
	加速度	角加速度	
	動量	角動量	
	質量	轉動慣量	
	力	力矩	
	牛頓第二運動定律	轉動學的牛頓第二運動定律	
	動量與力	角動量與力矩	
	動能	轉動動能	
【備註】：角速度、角加速度、角動量、力矩皆為向量，方向為右手螺旋定則 解題時，必須特別注意指的是大小還是方向。			

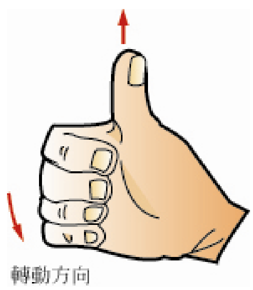
角速度 ω



角動量



力矩 τ



Here 轉動學→基本物理量的定義

080102 角速度(ω)

角速度 ω	
單位時間轉過的角度 (向量)	
平均角速度	瞬時角速度
$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 或 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

【單位】:
1. rad/s (每秒幾弧度)

2. r.p.m. (每分鐘幾轉)

3. r.p.s. (每秒鐘幾轉)

080103 角加速度(α)

角加速度	
單位時間角速度的變化量 (向量)	
平均角加速度	瞬時角加速度
$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ 或 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

【單位】:
1. rad/s^2

2. 轉/秒^2

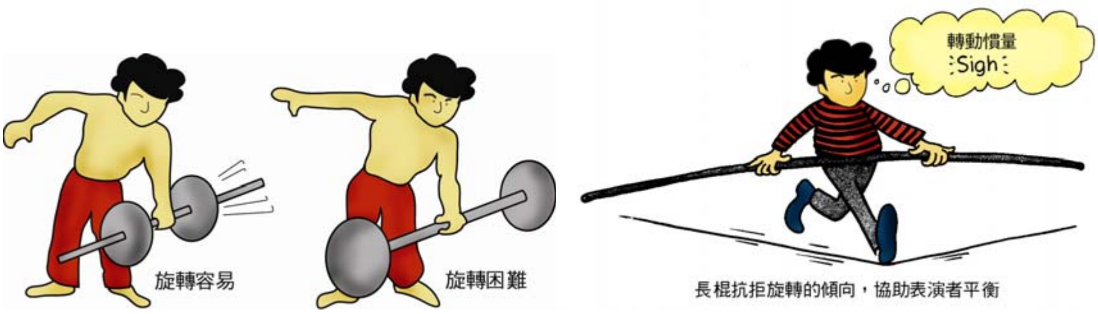
080104 轉動慣量(I)

1.意義：轉動的難易度。 (舉一反三：力學中，質量是移動的難易度)

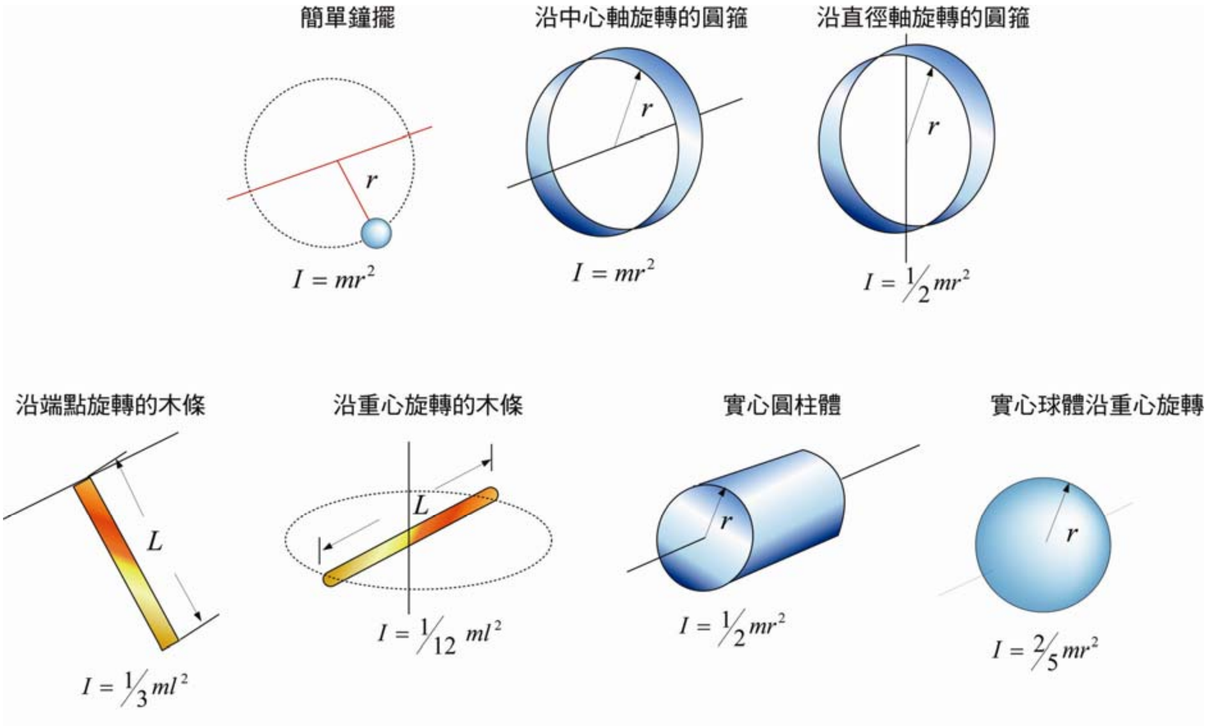
2.定義：

(1)質點的轉動慣量：

(2)非質點的轉動慣量：



3.不同物體的轉動慣量：



各種不同物體之轉動慣量，每一物體的質量為m，並依圖示之軸旋轉

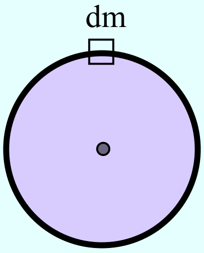
公 式：圓盤的轉動慣量

080105 進階補充：圓環與圓盤之轉動慣量

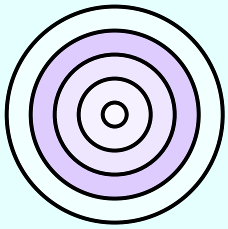
大部份的物理學公式，只適用於質點，利用萬有引力定律、庫侖定律，其他形狀的物體是否適用，則必須仔細推導，不一定能一體適用。

轉動慣量也是類似的情況，$I=mr^2$這個公式只能適用於質點，其他形狀物體的轉動慣量，必須靠積分求得。

以下，就以圓環與圓盤爲例，練習一下簡單的積分技巧。



先考慮一個繞中心軸旋轉的薄圓環，考慮一小段質量爲dm的圓環，由於每一段圓環到中心軸的距離等長，故r=R(R爲圓環之半徑)爲常數，$I=\int mr^2 = R^2\int dm$，把每一小段圓環質量相加，即爲圓環的總質量M，故轉動慣量$I=MR^2$。小試身手，只用到了積分的概念，沒有真正用到積分的計算。



接下來，考慮一個密度均勻的圓盤，我們可以把圓盤當做由無限多個圓環所組成。故 $I=\int_{r=0}^{r=R} d(mr^2)$，此時爲定積分(積分上下限由 r=0 積到 r=R，R 是圓盤的半徑)。

考慮距軸心r、質量爲dm的一個薄圓環，其轉動慣量，根據剛剛推導的結果爲$dm\times r^2$。我們應該轉換成單一變數的積分，質量dm與距離r，兩者有函數關係，假設此均勻圓盤的面積密度爲μ(面積密度應等於總質量除以圓盤之面積 $\mu=\dfrac{M}{\pi R^2}$，即單位面積的質量)，則此一小薄圓環的質量dm可寫爲$\mu\times(2\pi r\times dr)$，dr是此薄圓環的厚度。

故原積分式可表示爲

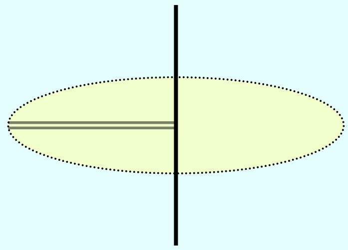
$$I=\int_{r=0}^{r=R} dm\cdot r^2 =\int_{r=0}^{r=R} \mu\cdot(2\pi r\cdot dr)\cdot r^2 =2\pi\mu\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr = 2\pi\mu\cdot(\frac{1}{4}r^4)\Big|_{r=0}^{r=R} =2\pi\mu\cdot(\frac{1}{4}R^4)$$

再將 $\mu=\dfrac{M}{\pi R^2}$ 代入，可得 $I=\dfrac{1}{2}MR^2$。

080106 進階補充：細桿之轉動慣量

前一篇已經講到，轉動慣量$I=mr^2$這個公式只能適用於質點，其他形狀物體的轉動慣量，必須靠積分求得。

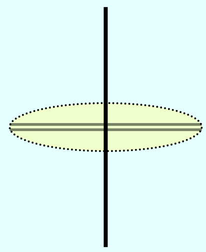
以下，我們再以細桿為例，練習一下簡單的積分技巧。同時，轉動慣量除了與形狀有關以外，還跟旋轉軸的選取有關。我們先來看質量為 M、長度為的細桿，如果以垂直於細桿，且在細桿端點的旋轉軸旋轉時的轉動慣量為何？



假設我們取質量為dm、距離旋轉軸r處的一小段，其轉動慣量為$dm\times r^2$。為了變換成單一變數，dm可以表示成$\lambda\times dr$，dr是這一小段的長度，λ是單位長度的質量，如果以整根細桿來看$\lambda=\dfrac{M}{L}$。

故轉動慣量 $I=\int dm\cdot r^2=\int_{r=0}^{r=L}(\lambda\cdot dr)\cdot r^2=\lambda\int_{r=0}^{r=L}r^2\cdot dr=\lambda\cdot(\frac{1}{3}L^3)$

將 $\lambda=\dfrac{M}{L}$ 代入，整理可得 $I=\dfrac{1}{3}ML^2$。



如果改以過細桿中點且垂直於細桿的旋轉軸旋轉時，轉動慣量會是多少呢？討論的過程同前，只是分成對稱的兩部份積分，如果只算半根細桿，積分的上下限改成由 0 到$\dfrac{L}{2}$，算整根細桿時再乘以 2。

故轉動慣量 $I=\int dm\cdot r^2=2\int_{r=0}^{r=L/2}(\lambda\cdot dr)\cdot r^2=2\lambda\int_{r=0}^{r=L/2}r^2\cdot dr=2\lambda\cdot(\frac{1}{24}L^3)=\frac{1}{12}\lambda L^3$

將 $\lambda=\dfrac{M}{L}$ 代入，整理可得 $I=\dfrac{1}{12}ML^2$。

8-2 等角加速度運動

Here 轉動學→轉動運動學

080201 移動與轉動物理量之關係

1.位移： 【記法與技巧】：從扇形開始

2.切線速率：

3.切線加速度：

4.法線加速度：

5.加速度：

【以上公式是描述移動與轉動之間的溝通橋樑】

080202 轉動運動學基本公式

等加速度運動	等角加速度運動
$v = v_o + at$	$\omega = \omega_o + \alpha\ t$
$S = v_o t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha\ t^2$
$v^2 = v_o^2 + 2aS$	$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$
$S = \frac{v_o + v}{2}t$	$\theta = \frac{\omega_o + \omega}{2}t$

基本的轉動運動學跟第二章學到的運動學，其實題型完全都一樣，只是換成轉動的物理量，所以記住一開始物理量對應的表格，然後想成運動學的題目，就可以迎刃而解。

範例 01

080203

1.(86 日大)一圓輪在做等角加速度運動，經過 25 轉之後，角速度由 100 轉/秒增至 150 轉/秒;其角加速度爲_____ 。

2.一物體在做等加速度運動，經過 25m 之後，角速度由 100m/秒增至 150m/秒;其加速度爲_____ 。

解題思路

想像成直線上的等加速度運動，代入運動學第_____公式。

範例 02

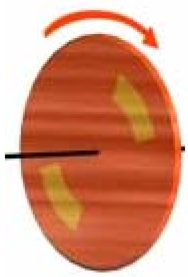
080204

一飛輪在 4 秒內共轉 400 弧度，在 3 秒末角速度爲 200 rad/s，若爲等角加速度轉動，求初角速度爲若干rad/s？ 角加速度爲若干rad/s^2?

解題思路

想像成直線上的等加速度運動，要代運動學第幾公式?

解 答：－100、100



範例 03

080205

某一質點做等角加速度運動，其初角位置爲-10 rad，初角速度爲-2 rad/s，經過 20 秒後，其角位置爲+10 rad，則：

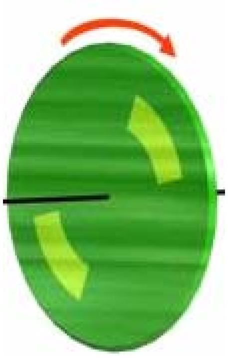
(1)其角加速度爲何?

(2)負向最大角位置之時間爲何?

(3)第 5 秒末的角速度爲何?

解題思路

想像成直線上的等加速度運動



範例 04

080206

某一質點做轉動，其角位置 θ(弧度)與時間 t(秒)之關係爲 $\theta = 2t^2 + 3$ ，則該點

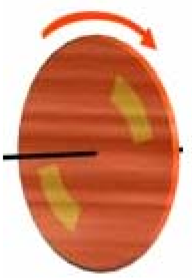
(1)第 2 秒末的角速度爲何?

(2)第 2 秒末的角加速度爲何?

(3)2 秒內的平均角速度爲何?

解題思路

瞬時與平均量的基本定義



範例 05

080207

一質點在半徑為 1 m 的圓周上運動，在某瞬間的角速度為 2rad/s，角加速度為 3 rad/s ^{2} ，求此質點的加速度大小為何?

解題思路

加速度：$a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}$ 又 $a_T=r\cdot\alpha$ 、 $a_N=r\omega^2$

範例 06

080208

一質點由靜止開始做等角加速度運動，則當其加速度與向心加速度成 45°時，此質點的角位移為何? (此題沒有給任何符號與數字)

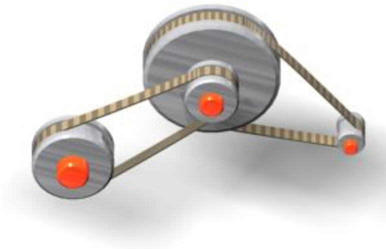
範例 07

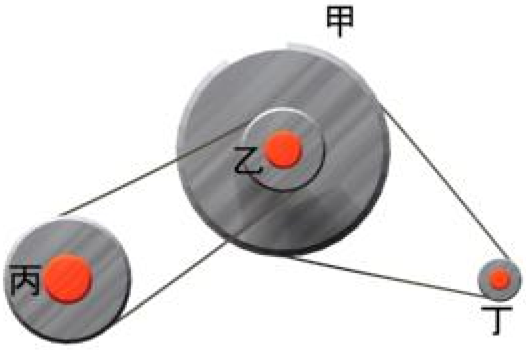
080209

右圖表示一飛輪傳動系統，各輪的轉軸均固定且相互平行。甲、乙兩輪同軸且無相對轉動。已知甲、乙、丙、丁四輪的半徑比爲 5 : 2 : 3 : 1，若傳動帶在各輪轉動中不打滑，則丙及丁輪角速度之比值爲_______ 。

解題思路

「同軸」表示：____相同，「同線」表示：____相同

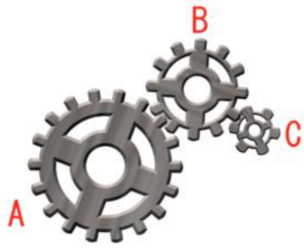




範例 08

080210

右圖表示一齒輪傳動系統，齒輪互相咬合。已知 A、B、C 三輪的半徑比爲 3 : 2 : 1，在各輪轉動中不打滑，則 A、B、C 三輪角速度之比值爲_______ 。



解題思路

齒輪咬合表示：____相同