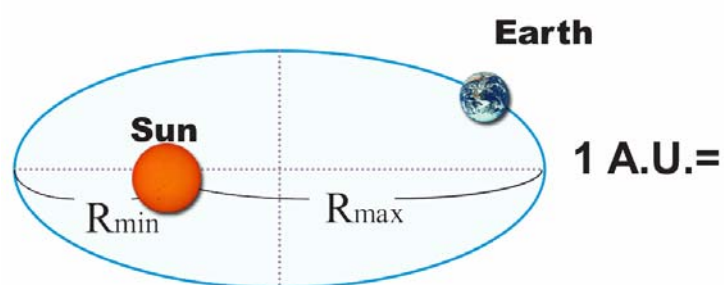


6-1 克卜勒的行星運動三定律

060101 天文中常用的距離單位

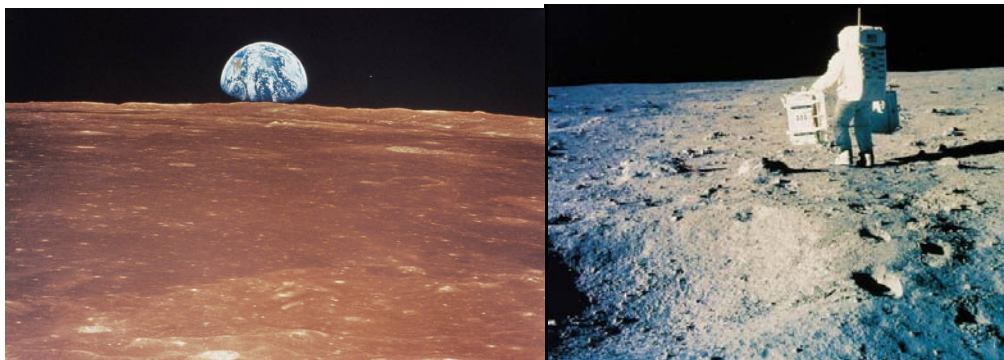
單 位	意 義	大 小
A.U. (天文單位)	日、地間的_____距離	1.496×10^{11} 公尺
光 年	光走一年的距離	9.46×10^{15} 公尺
備 註	A.U. = Astronomy Unit	



【牛刀小試】：光年(light year)是(A)時間 (B)距離 (C)質量 (D)光度 的單位

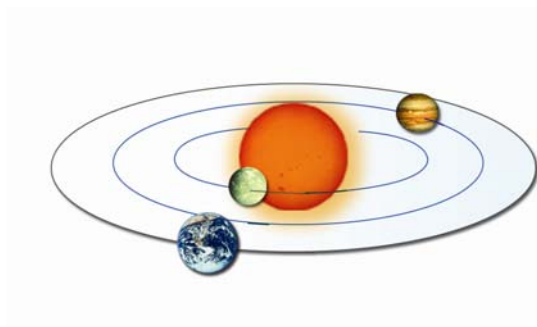
060102 光速小常識

1. 光一秒走_____公里=_____公尺=_____公分
2. 光從太陽走到地球約= 500 秒 (1 億 5000 萬公里)=_____分鐘
3. 光走出太陽系(冥王星)=_____小時
4. 光從地球走到月球(Moon)=_____秒
5. 光從北極星走到地球=_____年



060103 克卜勒三大行星運動定律

	意 義	描 述
第一定律：	軌道定律	行星在以太陽為焦點的橢圓(ellipse) 軌道(orbit)上運行
第二定律：	等面積速率定律	行星與太陽的連線在相同時間掃過相同面積
第三定律：	週期定律	平均距離的立方與週期的平方，兩者的比值為常數



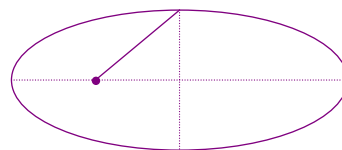
060104 橢圓(ellipse) 的基本概念

1 符號定義：

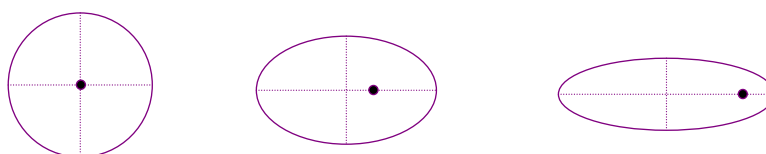
①半長軸：____；②長軸：____；

③半短軸：____；④短軸：____；

⑤焦距：____。



2 離心率(eccentricity)的意義：_____ 離開 _____的比率



3 離心率(eccentricity)的數學定義：

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0 \leq e < 1 \text{ (圓的 } e=0 \text{)}$$

4 橢圓(ellipse) 面積： $A = \pi ab$

eccentric 離心的；eccentricity 離心率

060105 克卜勒第一定律(Kepler's First Law) --軌道定律

1 克卜勒第一定律：行星在以太陽為焦點(focus)的橢圓(ellipse) 軌道(orbit)上運行

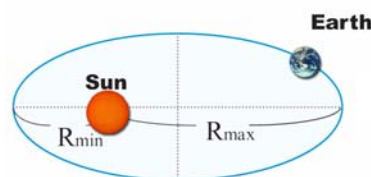
2 太陽系行星的離心率(eccentricity)：

水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星	哈雷彗星
0.206	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0556	0.0472	0.0086	0.25	0.96



思考問題

克卜勒算出橢圓軌道的關鍵之一？

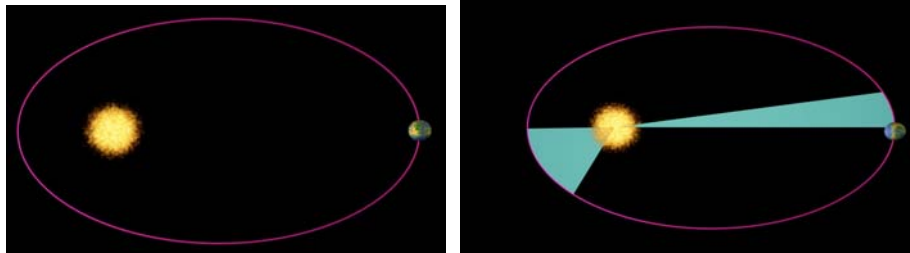
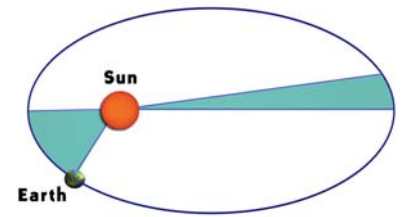


060106 克卜勒第二定律(Kepler's Second Law)

----等面積(速率)定律

1 第二定律=等面積速率定律：

行星與太陽的連線，在相同時間，掃過相同面積。



2 『面積速率』的意義：

$\frac{\Delta A}{\Delta t}$ ：單位時間，太陽與行星的連線，掃過的面積

近日點 the perihelion；遠日點 the aphelion

3 推導前的數學背景知識：

三角形面積公式	扇形面積公式

4 數學推導：

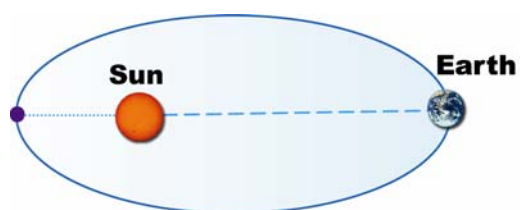
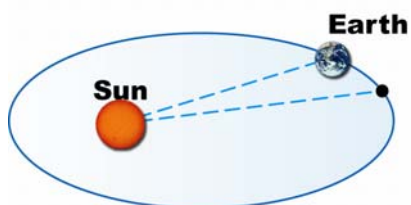
推導法(一)	推導法(二)

5 常考特例：

近日點(perihelion)與遠日點(aphelion)----若只考慮近日點與遠日點，則公式可化簡為：

$$(1) r_1 v_1 = r_2 v_2 \quad (r \text{ 是與太陽的距離，不是軌道半徑})$$

$$(2) r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$$



6 (平均)面積速率的大小(key:看一圈)：

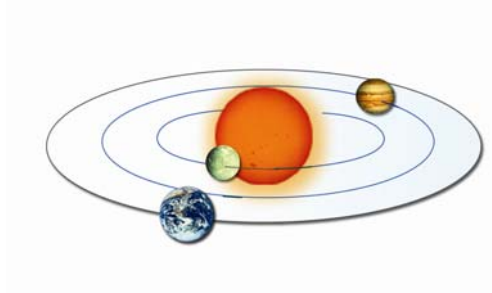
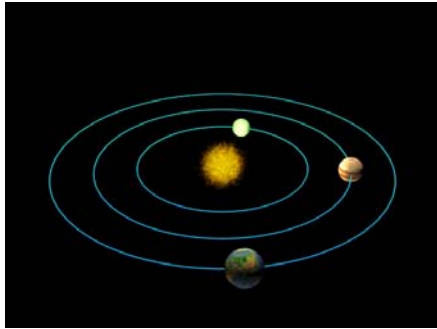
軌道(orbit)種類	圓 形	橢 圓 形
面積速率	$\frac{\Delta A}{\Delta t} =$	$\frac{\Delta A}{\Delta t} =$

7 各行星的比較

$$\frac{\Delta A_{\text{水}}}{\Delta t} = K_{\text{水}}$$

$$\frac{\Delta A_{\text{金}}}{\Delta t} = K_{\text{金}}$$

$$\frac{\Delta A_{\text{地}}}{\Delta t} = K_{\text{地}}$$



思考問題

K 水 = K 金 = K 地嗎？

範例 01

060107



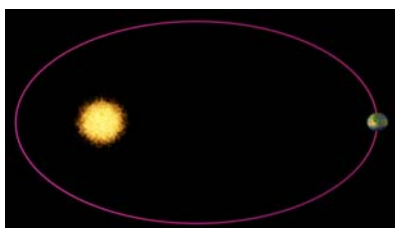
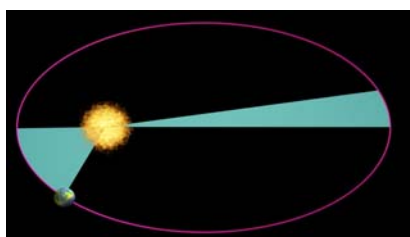
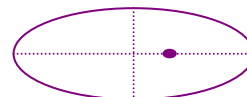
(69 日大) 七月時地球與太陽之距離最大為 1.02 天文單位(AU astronomical unit)，一月時距離最小為 0.98 天文單位(AU astronomical unit)。設地球繞日運動之速率在七月時為 v_7 ，在一月時為 v_1 ，則由克卜勒第二定律可知 v_7/v_1 約等於：
 (A) 1.08 (B) 1.04 (C) 1 (D) 0.96 (E) 0.93 **【(D)】**

解題思路

① 克卜勒 2nd Law: $r_1 v_1 = r_2 v_2$ (近日點與遠日點)

② 七月 → 夏天 → 遠日點；一月 → 冬天 → 近日點(perihelion)。

(學到第 10 章，此計算可用二項式定理的近似)



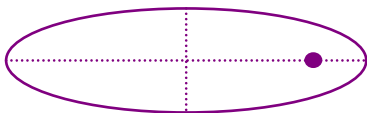
【牛刀小試】：某一行星與一恆星之最大距離為 2 天文單位(AU astronomical unit)，距離最小為 0.5 天文單位(AU astronomical unit)。設最大距離時速度為 v_1 、最小為 v_2 ，則 v_1/v_2 ？ **【1/4】**

060108



範例 02

(82 日大) 某彗星(Comet)以橢圓形軌道(ellipse orbit)繞太陽公轉(revolution)，其與太陽之最大距離為其與太陽最短距離之 100 倍。今測得此彗星在最接近太陽時的速率為 1000 公里/秒，其在最遠離太陽時之速率為 _____ 公里/秒。

【10】

【牛刀小試】：某彗星以橢圓形軌道繞太陽公轉，其與太陽之最大距離為其與太陽最短距離之 100 倍。今測得此彗星在最接近太陽時的速率為 500 公里/秒，其最遠離太陽時之速率為？(km/s) 【5】

範例 03

(84 日大)

060109



一衛星環繞一行星做橢圓軌道(ellipse orbit) 之運動，設此衛星至行星最遠距離與最近距離之比為 2:1，則相應之角速度(angular velocity)比為_____。

【1: 4】

解題思路

克卜勒 2nd Law : $r_1^2\omega_1=r_2^2\omega_2$ (近日點與遠日點)

【牛刀小試】：

- 一衛星繞一行星作橢圓軌道(ellipse orbit) 之運動，設此衛星至行星最遠距離與最近距離之比為 3 : 1，則相應之角速度(angular velocity)比為？【1 : 9】
- 一衛星繞一行星作橢圓軌道(ellipse orbit) 之運動，設此衛星至行星最遠距離與最近距離之比為 3 : 2，則相應之角速度(angular velocity)比為？【4 : 9】

範例 04

(86 日大)

060110



一人造衛星(artificial satellite)質量為 m ，以橢圓軌道(ellipse orbit) 繞地球運行；衛星離地球中心最近的距離為 R ，離地心最遠的距離為 $3R$ 。設地球質量為 M ，重力(gravity)常數為 G ，試求：衛星在離地心最近與最遠處之動能比？

【9:1】

解題思路

克卜勒 2nd Law : $r_1v_1=r_2v_2$ (近日點與遠日點)

060111



範例 05

1. 已知某行星繞太陽運行，軌道(orbit) 為圓形，在單位時間內半徑掃過之面積 A ，若行星沿切線方向速度之量值為 v ，則其軌道半徑為_____。
2. 已知某行星繞太陽運行，軌道(orbit)為圓形，在單位時間內半徑掃過之面積為 A ，若軌道半徑為 R ，則行星沿切線方向速度之量值為_____。
3. 已知某行星繞太陽運行，軌道為圓形，在單位時間內半徑掃過之面積 A ，若角速度(angular velocity)為 ω ，則行星沿切線方向速度之量值為_____。

【1. $\frac{2A}{v}$ 2. $\frac{2A}{R}$ 3. $\sqrt{2A\omega}$ 】

解題思路

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}r^2\omega \quad (\text{for 圓軌道})$$

範例 06

進階挑戰

060112



1. 已知A行星繞日週期為 10^6 秒，其圓形軌道(orbit)半徑為 2×10^{12} 米，則其掠掃速率(行星與太陽連線，單位時間掃過的面積)為若干 m^2/s ？
(A) $0.5\pi \times 10^{18}$ (B) $2.25\pi \times 10^{18}$ (C) $3\pi \times 10^{18}$ (D) $2\pi \times 10^{18}$
(E) $4\pi \times 10^{18}$ 【(E)】
2. 已知A行星繞日週期為 10^6 秒，其橢圓軌道(ellipse orbit)長軸為 2×10^{12} 米；短軸為 1×10^{12} 米，則其掠掃速率為若干 m^2/s ？
(A) $0.5\pi \times 10^{18}$ (B) $2.25\pi \times 10^{18}$ (C) $3\pi \times 10^{18}$ (D) $2\pi \times 10^{18}$
(E) $4\pi \times 10^{18}$ 【(A)】

解題思路

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi R^2}{T} \quad (\text{for 圓軌道 orbit}); \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} \quad (\text{for 橢圓軌道 orbit})$$

【牛刀小試】：已知 A 行星繞日週期為 10^5 秒，其圓形軌道(orbit)半徑為 10^{10} 米，其掠掃速率為？【 $\pi \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$ 】

Here 克卜勒三大定律 → 第三定律

060113  克卜勒第三定律(Kepler's Third Law)

----週期定律

1 克卜勒的計算(<宇宙和諧論>，1619 A.D.)：

行 星	T	R	T ²	R ³	R ³ /T ²
水 星	0.241	0.387	0.058	0.058	1
金 星	0.615	0.723	0.378	0.378	1
地 球	1.000	1.000	1	1	1
火 星	1.881	1.524			
木 星	11.862	5.203			
土 星	29.457	9.539			

2 克卜勒第三定律：平均距離的立方與週期的平方，兩者的比值為常數

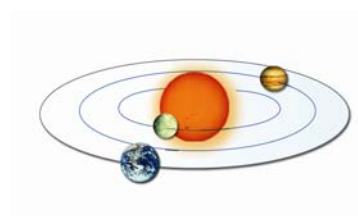
$$\frac{R^3}{T^2} = \text{const} ; \text{ 其中 } R = \frac{R_{\text{近}} + R_{\text{遠}}}{2}$$

重要前提 克卜勒第三定律只適用繞同一中心星球的星系

3 常考的兩大星系：

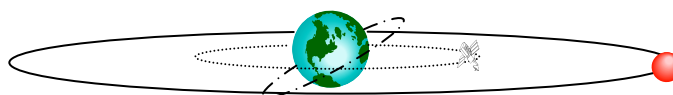
(1)、太陽系

$$\frac{R_{\text{水}}^3}{T_{\text{水}}^2} = \frac{R_{\text{金}}^3}{T_{\text{金}}^2} = \frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2} = \frac{R_{\text{火}}^3}{T_{\text{火}}^2} = \frac{R_{\text{木}}^3}{T_{\text{木}}^2} = \frac{R_{\text{土}}^3}{T_{\text{土}}^2} = \frac{R_{\text{天}}^3}{T_{\text{天}}^2} = \frac{R_{\text{海}}^3}{T_{\text{海}}^2} = \frac{R_{\text{冥}}^3}{T_{\text{冥}}^2} = \frac{R_{\text{哈}}^3}{T_{\text{哈}}^2} =$$



(2)、一般衛星、地球同步衛星(synchronous satellite)與月球(Moon)

$$\frac{R_{\text{衛}}^3}{T_{\text{衛}}^2} = \frac{R_{\text{同步}}^3}{T_{\text{同步}}^2} = \frac{R_{\text{月}}^3}{T_{\text{月}}^2}$$



060114



範例 07

(83 日大) 已知土星繞太陽運轉之平均距離約為地球繞太陽運轉平均距離的 10 倍，則土星繞太陽一周需時____年。 【 $10\sqrt{10}$ 】

解題思路

土星要跟地球比較，因為同繞太陽旋轉

【牛刀小試】：已知一行星繞太陽運轉之平均距離約為地球繞太陽運轉平均距離的 4 倍，則行星繞太陽一周需時？年 【8】

範例 08

060115



設一人造衛星(artificial satellite)以圓形軌道(orbit)繞地球運行，其軌道半徑為月球(Moon)軌道半徑的三分之一，則此衛星繞地球的週期 (A)在一天至四天之間 (B)在四天至八天之間 (C)在八天與十六天之間 (D)大於十六天 (E)與地球的自轉(rotation)週期相同 【(B)】

解題思路

① 人造衛星要跟月球(Moon)比較，因為同繞地球旋轉；②

$$\frac{R_{\text{衛}}^3}{T_{\text{衛}}^2} = \frac{R_{\text{同步}}^3}{T_{\text{同步}}^2} = \frac{R_{\text{月}}^3}{T_{\text{月}}^2}$$

範例 09

060116



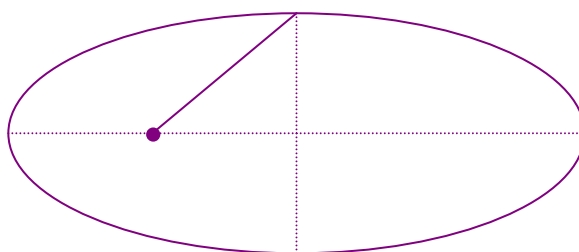
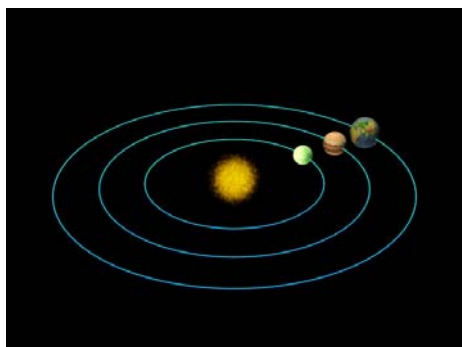
有關克卜勒第三定律，下列各敘述何者為正確？

- (A)地球繞日與月球繞地運行時，平均軌道半徑立方與週期平方比值相等
 (B)所有繞太陽運轉的行星，平均軌道(orbit) 半徑立方與週期平方比值皆相等
 (C)平均軌道半徑，係指橢圓(ellipse) 軌道長軸長度與短軸長度算術平均數之半
 (D)平均軌道半徑，即橢圓軌道上行星與太陽最近距離與最遠距離之算術平均數
 (E)平均軌道半徑，係指橢圓軌道短軸兩端與太陽之距離。

【(B)(D)(E)】

解題思路

橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。a：半長軸=平均軌道半徑；b：半短軸。



範例 10

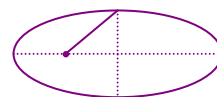
060117



已知某行星之橢圓軌道(orbit)之短軸長為 4A.U. (天文單位) 繞太陽之週期為 8 年，則其長軸為 (A)4 (B)8 (C)12 (D)16 (E)64 【(B)】

解題思路

橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。a：半長軸=平均軌道半徑；
b：半短軸。



【牛刀小試】：已知某行星之橢圓(ellipse) 軌道(orbit) 短軸長為 1A.U.(天文單位)，繞太陽之週期為 $2\sqrt{2}$ 年，則其長軸為？A.U. 【4】

範例 11

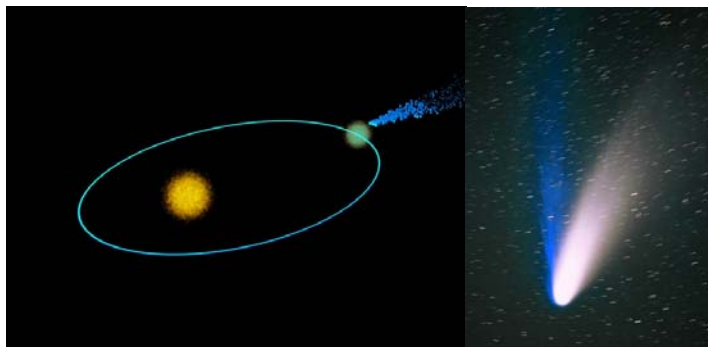
060118



.(86 日大)海爾-波普彗星(Comet Hale-Bopp)的週期約為 2500 年，則其與太陽的平均距離，約為地球與太陽平均距離的多少倍? (A)2500 倍 (B)1665 倍
(C)615 倍 (D)185 倍 (E)50 倍 【(D)】

解題思路

彗星(Comet)要跟地球比較，因為同繞太陽旋轉。



範例 12

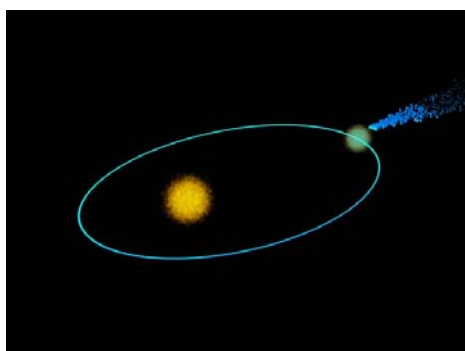
060119



(75 日大)地球與太陽之平均距離為一個天文單位(AU astronomical unit)。已知哈雷彗星(Comet Halley)約 76 年回歸一次，哈雷彗星與太陽之最近距離約為 0.6 天文單位(AU astronomical unit)，設所有行星對哈雷彗星影響皆可略去不計，則可推算哈雷彗星與太陽之最遠距離與下列那一距離最為接近? (A)17.6
(B)35.2 (C)70.4 (D)140.8 天文單位 【(B)】

解題思路

彗星(Comet)要跟地球比較，因為同繞太陽旋轉。



【牛刀小試】：某一彗星(Comet)的週期約為 343 年，則 (1) 其與太陽的平均距離約為地球與太陽平均距離的多少倍? (2) 若其與太陽最短距離為 38A.U.，則其最遠距離為? 【(1) 49 (2) 60A.U.】