
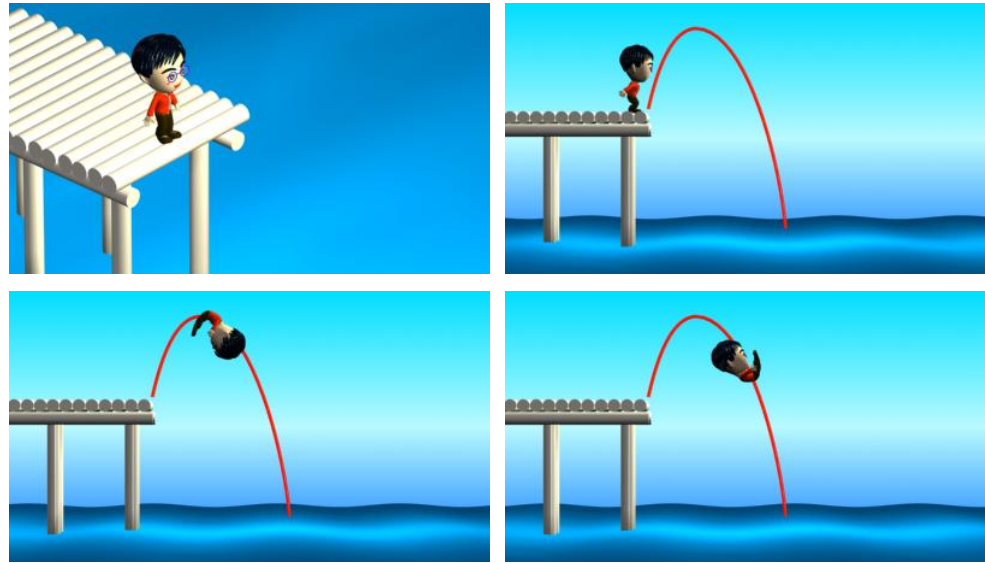
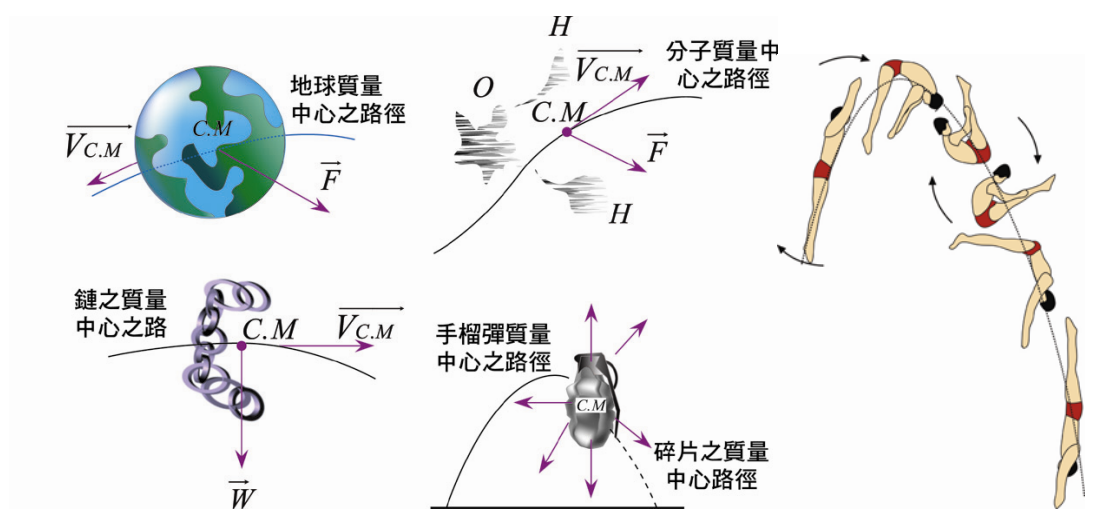



# 5-1 質點系統的質心運動


## Here 質點系統→質心與重心的觀念

050101  質心的基本觀念－「質心」代表整個系統的運動狀態



050102  質心六大公式－以「質心」代表整個系統的運動

	物理量	公 式
1	質心質量 (系統總質量)	$M = m_1 + m_2 + \dots$
2	質心動量 (系統總動量)	$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$
3	質心受力 (系統合力)	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$
4	質心位置	$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ , $y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$
5	質心速度	$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
6	質心加速度	$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$
備註:注意！速度、加速度都必須用向量運算		

050103  力學分析的對象

	觀點一	觀點二
觀點	單一質點(物體)	系統
意義	一次只分析一個質點(物體)	把一群質點(物體)當做一個整個系統來分析；系統的整體表現看_____

 系統與內力的觀念

- ➔ (1)「內力」：系統內物體彼此之間的作用力
- ➔ (2)「外力」：系統外的物體對系統內物體的作用力
- ➔ (3)系統內力：不會改變系統的運動狀態
- ➔ (4)系統外力：才會改變系統的運動狀態
- ➔ 分析整個系統時，內力無須列出，因為就整個系統而言，內力皆作用在同一個系統內，故彼此會抵消。

050104  質心座標系

➔ 【出發點】：質心速度的公式— 
$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

➔ 【推導】：

➔ 結論：系統相對於質心的總動量=0[觀察者站在質心看，動量守恆]  
即使受外力，此式仍然成立。

➔ 應用：第七章 推導「內動能」時會用到此結果

➔ 【推廣】： $m_1 \bar{x}_{1C} + m_2 \bar{x}_{2C} = 0$  若 CM 不動  $m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = 0$

## 範例 01

050105 

一條鐵鍊由 5 個相同的鐵環組成，今向空中將此鍊斜向拋出，若不計空氣阻力，則其隨後的運動情況為

- (A)位於正中央的第三個環，其運動軌跡必為拋物線
- (B)鍊條的質心之運動軌跡必為拋物線
- (C)位於正中央的第三個環，其運動的加速度之量值必等於  $g$
- (D)吾人可預知任一時刻，質心的位置及速度，但無法預知任一時刻第三環的位置及速度。

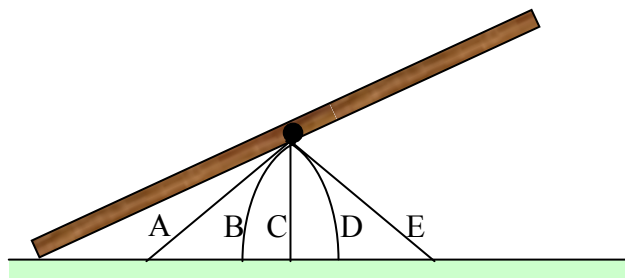
【解題觀念】：1.質心並非固定不動，質心會隨著組成物質的移動而移動  
2.質心不一定在物體內部，質心處不一定有物質

## 範例 02

050106 

(建中)一均勻木棒，置於光滑桌面，放手後其質心軌跡為？

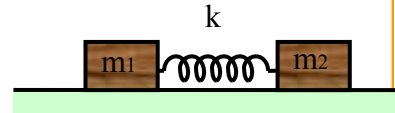
【解題觀念】：質心代表整個系統的運動狀態！分析一下，系統受什麼力呢？



**範例 03**

050107 

(85 日大)兩相同木塊(質量  $m_1=m_2=m$ )，中間連以彈力常數為  $k$  的彈簧(質量不計)，靜置於光滑的水平面上，如圖所示。假設左方木塊( $m_1$ )瞬間由系統外獲得向右的速度  $V$ ，試求隨後整個木塊與彈簧系統的質心速度？

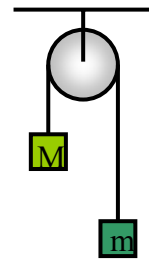


**【解題觀念】**：質心速度的公式記起來了嗎？

**範例 04**

050108 

圖中的裝置，質量  $m$  的物體和質量為  $M$  的另一物體以細繩相連，掛在滑輪上； $M>m$ 。繩子和滑輪的質量以及摩擦力均可忽略不計。在  $M$  下降、 $m$  上升的期間，則：



- (1) 這兩個物體的質量中心下降的加速度為？
- (2)  $t$  秒質心速度為何？ (3)  $t$  秒後質心位移為何？

**【解題觀念】**：①代質心位移、質心速度、質心加速度時，記得要用向量！  
 ②質心代表系統的運動狀態，系統質心亦可代運動學公式！

**【解答】**：(1)  $(\frac{M-m}{M+m})^2 g$  向下 (2)  $(\frac{M-m}{M+m})^2 g t$  向下 (3)  $\frac{1}{2} (\frac{M-m}{M+m})^2 g t^2$  向下

050109



### 範例 05

A 物體質量 3 公斤以 2 公尺/秒的速率向東運動，B 物體質量 2 公斤以 4 公尺/秒向南運動，則此系統的質心速度為何？

【解題觀念】：質心速度、加速度皆是向量！分成兩個互相垂直的方向代公式！

050110

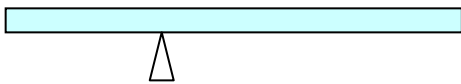


### 範例 06

質量為 2 : 1 的兩個人，分別坐於蹺蹺板的兩端，保持平衡，如果質量較大者，前進 10 公分，如欲繼續保持平衡，質量較小者需前進幾公分？

【解題觀念】：1. 蹺蹺板平衡，表示系統質心恰在支點上。

$$2. \quad m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = 0$$



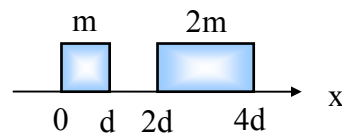
050111



### 範例 07

設有兩塊密度均勻的磁鐵置於無摩擦之桌面上(如圖)，假定其質量分別為  $m$  及  $2m$ ，則當二磁鐵相吸引碰在一起時，其碰撞點離開  $O$  點的距離為：

(A)  $d$     (B)  $2d$     (C)  $4d/3$     (D)  $5d/3$     (E)  $3d/2$



【解題觀念】：  $m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = 0$

050112



**範例 08**

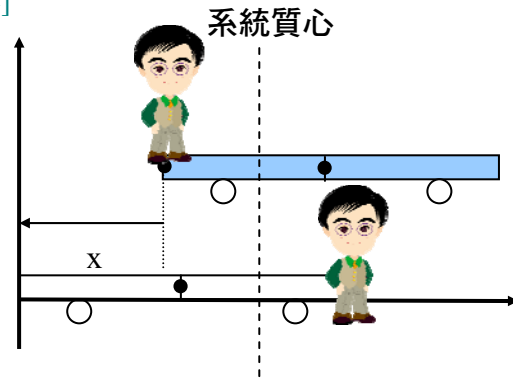
質量為  $m$  的 Kenny 在長度為  $L$ ，質量為  $M$  的靜止台車上行走，假設忽略台車與地面摩擦的影響，若 Kenny 從一端走到另一端，則：

(1)人相對於地的位移為何？ (2)車相對於地的位移為何？

【標準解法】：系統不受外力(人與車之作用力為內力)，故系統的質心不動！

[原來系統的質心座標]=[後來系統的質心座標]

$$\frac{M \cdot (x + \frac{L}{2}) + m \cdot x}{M + m} = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + m \cdot L}{M + m}$$



【解法<二>】：

**範例 09**

050113

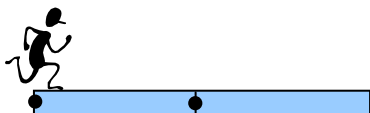


有一重 250 公斤，長 6 公尺之頭尾相稱，密度均勻之船隻靜止於水中，當重量為 50 公斤的人由船頭走到船尾，則此時間內船身移動多少距離？

(A) 1 公尺 (B) 1.2 公尺 (C) 1.5 公尺 (D) 2 公尺 (E) 3 公尺

解題思路

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！



050114

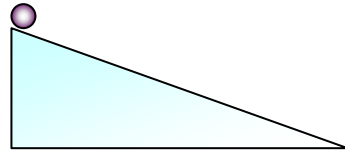


**範例 10**

(71 日大)於光滑斜面上置一傾角  $\theta$ ，質量為  $M$  的斜面體。另一質量為  $m$  的質點自斜面體上高度  $h$  處滑下，在此質點滑下的時間內，斜面體移動之位移為：

**解題思路**

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！



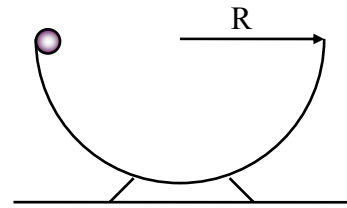
050115



**範例 11**

(69 日大)一碗狀物體，質量  $M$ ，其內壁呈半球形(半徑為  $R$ )。設此物體，被置於一光滑之水平面上(如圖)，另一質量為  $m$  的小物體自碗之內壁頂端滑落至碗底時，碗移動之距離為

- (A) 0 (B)  $\frac{mR}{M+m}$  (C)  $\frac{mR}{M}$  (D)  $\frac{MR}{M+m}$



**解題思路**

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！

**範例 12**

一長度為  $L$  質量為  $M$  的容器分成體積相等的兩部份，置於光滑地面上，左半部裝有質量為  $m$  的水，將中間隔板打破後，容器會移動多少距離？



【進階思考】：

1.(94 指考)一圓筒位在水平桌面上，力常數為  $k$  的彈簧之一端固定在圓筒的一個端面上、另一端頂著一顆小彈珠，如圖 16 所示。當彈簧既不被壓縮或伸長時，彈珠的中心剛好位在圓筒的開口端。小明緩緩施水平力於彈珠，使彈簧被壓縮一段距離  $d$  後放開，使彈珠由靜止被彈出。設圓筒與彈珠的質量分別為  $M$  及  $m$ ，且所有摩擦力、彈簧質量及頂著彈珠的平板質量均可不計。

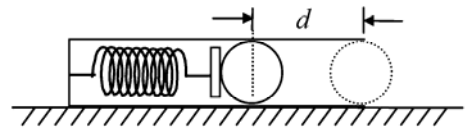


圖 16

(3). 若圓筒可以自由滑動，且圓筒的質心位在圓筒的圖 16 一半長度處。試問在彈珠由靜止彈出到被彈回開口端的時距內，圓筒總共滑行了多少距離？(以  $M$ ， $m$  及  $d$  表示)(4 分)

1.Sol:(3)水平質心不動  $\frac{m}{M+m}d$

2. 如圖11所示，質量 $M$ 之均勻方形盒靜置於光滑的水平面上，自其頂部的中央 $A$ 點，以長度 $5.0\text{cm}$ 之細繩懸吊一質量 $m=M/3$ 的質點，開始時該質點靜止且繩與鉛直線夾角 $\beta$ 為 $37^\circ$ ， $A$ 點的 $x$ 坐標 $O$ 取為原點。設重力加速度為 $10\text{m/s}^2$ ， $\sin 37^\circ = 3/5$ 。對靜立地面的觀察者而言，下列敘述何者正確？

- (B)整個系統的質心位置固定
- (C)整個系統質心的 $x$ 坐標固定在 $-0.75\text{cm}$
- (E) $m$ 質點擺到右邊最高點時， $M$ 方形盒向左移 $1.5\text{cm}$

2.CE

- (B)鉛直受力，鉛直質心會動
- (C)

$$x_c = \frac{m \times (-5 \sin 37^\circ) + M \times 0}{m + M} = \frac{m \times (-3)}{m + 3m} = -0.75$$

(E)  $\frac{m \times 6}{m + 3m} = 1.5$

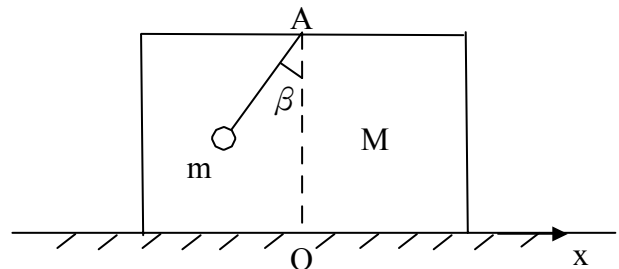


圖 11



050117



**範例 13**

質量為 200kg 的船停於水面上，首尾各立質量為 60kg、40kg 的 Kenny、Kyle 兩人，若船身長 30 公尺，且不計水的阻力，則：

(1)當兩人交換位置之後，船身移動若干? (2)當兩人走到船的中點，船身移動若干?

**解題思路**

把一個複雜的問題，拆解成幾個基本的步驟！

(1)之【解法<一>----】:



(1)之【解法<二>----】:



050118

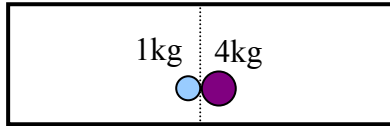


**範例 14**

原先靜止長度 24 公尺重量為 5 公斤的框架中央有 1 公斤與 4 公斤的物體，今兩物體分別往外彈開後黏於框架之兩端，當兩物黏於框架後，框架的位移為何？

**解題思路**

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！



**進階挑戰**

1kg 的物體速度=12m/s，4kg 物體爆炸後多久撞到框架？

**範例 15**

050119



質量分別為 30kg、70kg 的甲、乙兩人，分別自長 10 公尺、質量為 50kg 的台車兩端相向而行，甲走 3 公尺，乙走 5 公尺，不計台車與地面摩擦的影響，則台車對地的位移為何？

