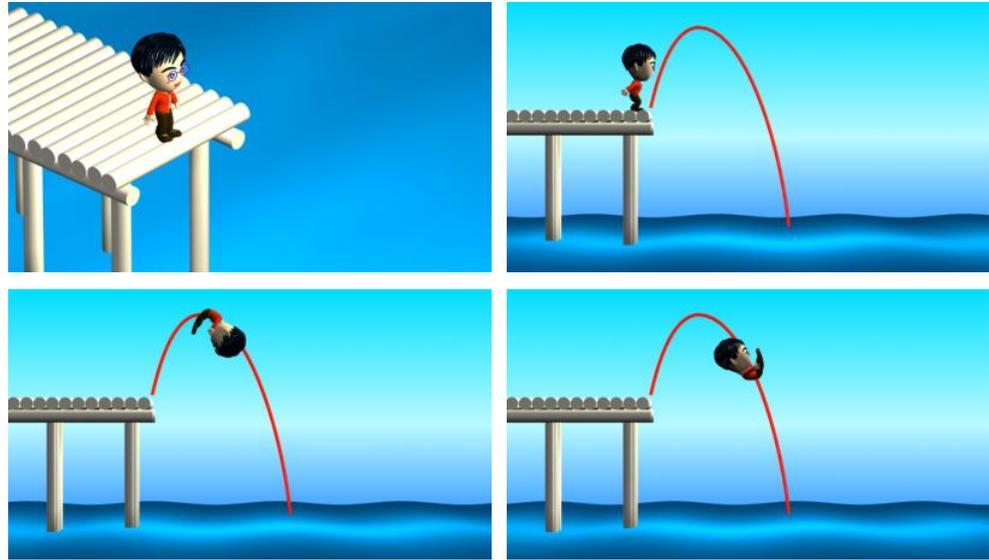
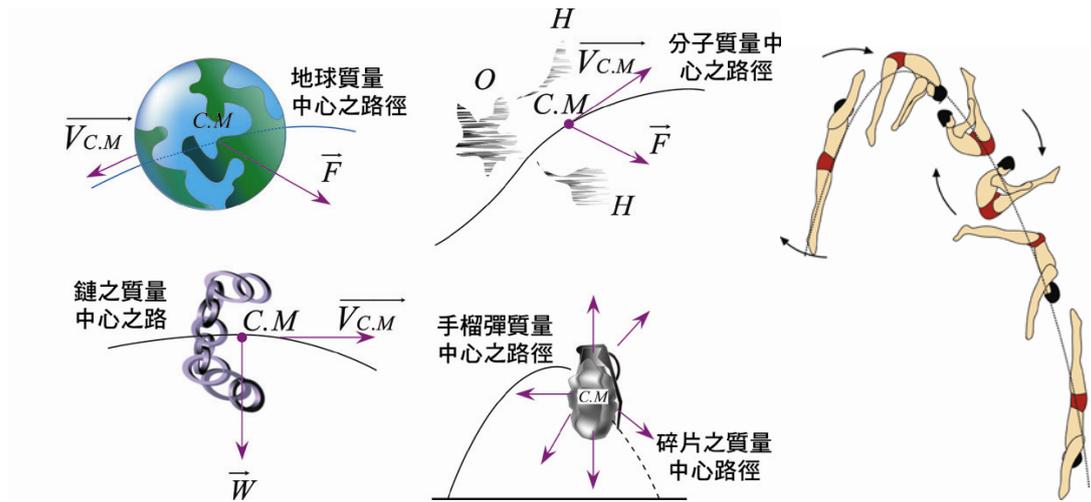


5-1 質點系統的質心運動

Here 質點系統→質心與重心的觀念

050101  質心的基本觀念－「質心」代表整個系統的運動狀態



050102  質心六大公式－以「質心」代表整個系統的運動

	物理量	公 式
1	質心質量 (系統總質量)	$M = m_1 + m_2 + \dots$
2	質心動量 (系統總動量)	$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$
3	質心受力 (系統合力)	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$
4	質心位置	$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$
5	質心速度	$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
6	質心加速度	$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$
備註:注意！速度、加速度都必須用向量運算		

050103  力學分析的對象

	觀點一	觀點二
觀點	單一質點(物體)	系統
意義	一次只分析一個質點(物體)	把一群質點(物體)當做一個整個系統來分析；系統的整體表現看_____

 系統與內力的觀念

- ➔ (1)「內力」：系統內物體彼此之間的作用力
- ➔ (2)「外力」：系統外的物體對系統內物體的作用力
- ➔ (3)系統內力：不會改變系統的運動狀態
- ➔ (4)系統外力：才會改變系統的運動狀態
- ➔ 分析整個系統時，內力無須列出，因為就整個系統而言，內力皆作用在同一個系統內，故彼此會抵消。

050104  質心座標系

➔ 【出發點】：質心速度的公式—
$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

➔ 【推導】：

➔ 結論：系統相對於質心的總動量=0[觀察者站在質心看，動量守恆]
即使受外力，此式仍然成立。

➔ 應用：第七章 推導「內動能」時會用到此結果

➔ 【推廣】： $m_1 \bar{x}_{1C} + m_2 \bar{x}_{2C} = 0$ 若 CM 不動 $m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = 0$

範例 01

050105 

一條鐵鍊由 5 個相同的鐵環組成，今向空中將此鍊斜向拋出，若不計空氣阻力，則其隨後的運動情況為

- (A) 位於正中央的第三個環，其運動軌跡必為拋物線
- (B) 鍊條的質心之運動軌跡必為拋物線
- (C) 位於正中央的第三個環，其運動的加速度之量值必等於 g
- (D) 吾人可預知任一時刻，質心的位置及速度，但無法預知任一時刻第三環的位置及速度。

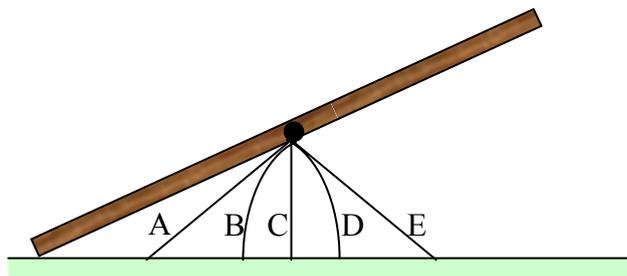
【解題觀念】：1. 質心並非固定不動，質心會隨著組成物質的移動而移動
2. 質心不一定在物體內部，質心處不一定有物質

範例 02

050106 

(建中)一均勻木棒，置於光滑桌面，放手後其質心軌跡為？

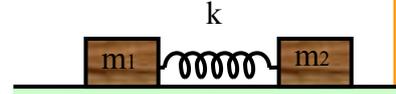
【解題觀念】：質心代表整個系統的運動狀態！分析一下，系統受什麼力呢？



範例 03

050107 

(85 日大)兩相同木塊(質量 $m_1=m_2=m$)，中間連以彈力常數為 k 的彈簧(質量不計)，靜置於光滑的水平面上，如圖所示。假設左方木塊(m_1)瞬間由系統外獲得向右的速度 V ，試求隨後整個木塊與彈簧系統的質心速度？

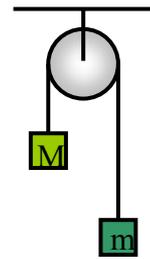


【解題觀念】：質心速度的公式記起來了嗎？

範例 04

050108 

圖中的裝置，質量 m 的物體和質量為 M 的另一物體以細繩相連，掛在滑輪上； $M > m$ 。繩子和滑輪的質量以及摩擦力均可忽略不計。在 M 下降、 m 上升的期間，則：



- (1) 這兩個物體的質量中心下降的加速度為？
- (2) t 秒質心速度為何？ (3) t 秒後質心位移為何？

【解題觀念】：①代質心位移、質心速度、質心加速度時，記得要用向量！
 ②質心代表系統的運動狀態，系統質心亦可代運動學公式！

【解答】：(1) $(\frac{M-m}{M+m})^2 g$ 向下 (2) $(\frac{M-m}{M+m})^2 g t$ 向下 (3) $\frac{1}{2} (\frac{M-m}{M+m})^2 g t^2$ 向下

050109



範例 05

A 物體質量 3 公斤以 2 公尺/秒的速率向東運動，B 物體質量 2 公斤以 4 公尺/秒向南運動，則此系統的質心速度為何？

【解題觀念】：質心速度、加速度皆是向量！分成兩個互相垂直的方向代公式！

050110



範例 06

質量為 2 : 1 的兩個人，分別坐於蹺蹺板的兩端，保持平衡，如果質量較大者，前進 10 公分，如欲繼續保持平衡，質量較小者需前進幾公分？

【解題觀念】：1. 蹺蹺板平衡，表示系統質心恰在支點上。

$$2. \quad m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = 0$$



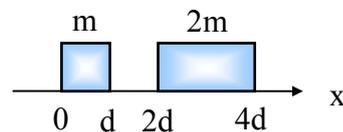
050111



範例 07

設有兩塊密度均勻的磁鐵置於無摩擦之桌面上(如圖)，假定其質量分別為 m 及 $2m$ ，則當二磁鐵相吸引碰在一起時，其碰撞點離開 O 點的距離為：

(A)d (B)2d (C)4d/3 (D)5d/3 (E)3d/2



【解題觀念】： $m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = 0$

050112

範例 08

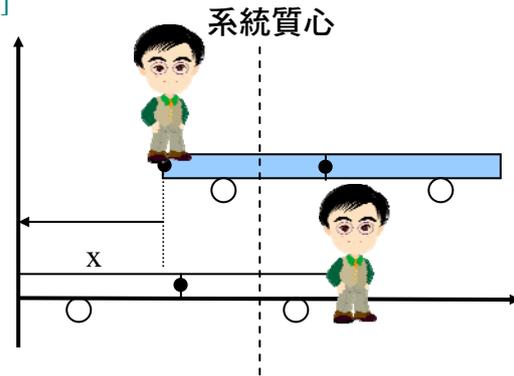
質量為 m 的 Kenny 在長度為 L ，質量為 M 的靜止台車上行走，假設忽略台車與地面摩擦的影響，若 Kenny 從一端走到另一端，則：

(1)人相對於地的位移為何？ (2)車相對於地的位移為何？

【標準解法】：系統不受外力(人與車之作用力為內力)，故系統的質心不動！

[原來系統的質心座標]=[後來系統的質心座標]

$$\frac{M \cdot (x + \frac{L}{2}) + m \cdot x}{M + m} = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + m \cdot L}{M + m}$$



【解法<二>】：

範例 09

050113

有一重 250 公斤，長 6 公尺之頭尾相稱，密度均勻之船隻靜止於水中，當重量為 50 公斤的人由船頭走到船尾，則此時間內船身移動多少距離？

(A) 1 公尺 (B) 1.2 公尺 (C) 1.5 公尺 (D) 2 公尺 (E) 3 公尺

解題思路

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！



050114

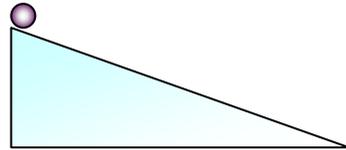


範例 10

(71 日大)於光滑斜面上置一傾角 θ ，質量為 M 的斜面體。另一質量為 m 的質點自斜面體上高度 h 處滑下，在此質點滑下的時間內，斜面體移動之位移為：

解題思路

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！



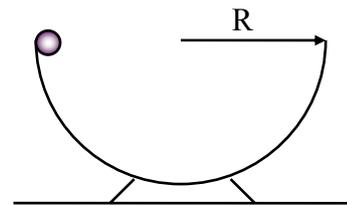
050115



範例 11

(69 日大)一碗狀物體，質量 M ，其內壁呈半球形(半徑為 R)。設此物體，被置於一光滑之水平面上(如圖)，另一質量為 m 的小物體自碗之內壁頂端滑落至碗底時，碗移動之距離為

- (A) 0 (B) $\frac{mR}{M+m}$ (C) $\frac{mR}{M}$ (D) $\frac{MR}{M+m}$



解題思路

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！

範例 12

一長度為 L 質量為 M 的容器分成體積相等的兩部份，置於光滑地面上，左半部裝有質量為 m 的水，將中間隔板打破後，容器會移動多少距離？



【進階思考】：

1.(94 指考)一圓筒位在水平桌面上，力常數為 k 的彈簧之一端固定在圓筒的一個端面上、另一端頂著一顆小彈珠，如圖 16 所示。當彈簧既不被壓縮或伸長時，彈珠的中心剛好位在圓筒的開口端。小明緩緩施水平力於彈珠，使彈簧被壓縮一段距離 d 後放開，使彈珠由靜止被彈出。設圓筒與彈珠的質量分別為 M 及 m ，且所有摩擦力、彈簧質量及頂著彈珠的平板質量均可不計。

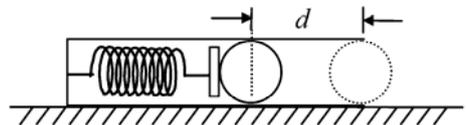


圖 16

(3). 若圓筒可以自由滑動，且圓筒的質心位在圓筒的圖 16 一半長度處。試問在彈珠由靜止彈出到被彈回開口端的時距內，圓筒總共滑行了多少距離？(以 M ， m 及 d 表示)(4 分)

1.Sol:(3)水平質心不動 $\frac{m}{M+m}d$

2. 如圖11所示，質量 M 之均勻方形盒靜置於光滑的水平面上，自其頂部的中央A點，以長度5.0cm之細繩懸吊一質量 $m=M/3$ 的質點，開始時該質點靜止且繩與鉛直線夾角 β 為 37° ，A點的x坐標O取為原點。設重力加速度為 10m/s^2 ， $\sin 37^\circ = 3/5$ 。對靜立地面的觀察者而言，下列敘述何者正確？

- (B)整個系統的質心位置固定
- (C)整個系統質心的x坐標固定在 -0.75cm
- (E)m質點擺到右邊最高點時，M方形盒向左移1.5cm

2.CE

- (B)鉛直受力，鉛直質心會動
- (C)

$$x_c = \frac{m \times (-5 \sin 37^\circ) + M \times 0}{m + M} = \frac{m \times (-3)}{m + 3m} = -0.75$$

(E) $\frac{m \times 6}{m + 3m} = 1.5$

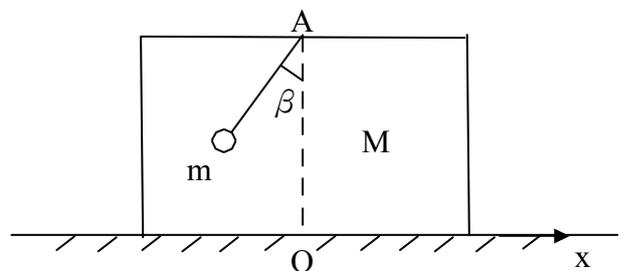


圖 11

050117



範例 13

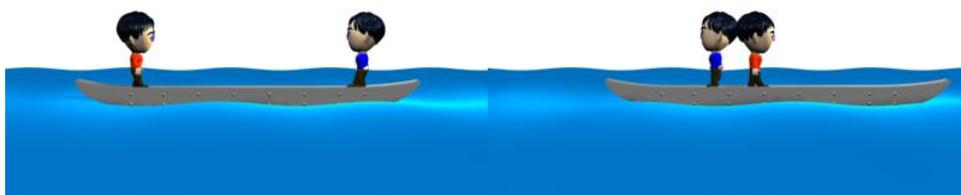
質量為 200kg 的船停於水面上，首尾各立質量為 60kg、40kg 的 Kenny、Kyle 兩人，若船身長 30 公尺，且不計水的阻力，則：

(1)當兩人交換位置之後，船身移動若干? (2)當兩人走到船的中點，船身移動若干?

解題思路

把一個複雜的問題，拆解成幾個基本的步驟！

(1)之【解法<一>----】:



(1)之【解法<二>----】:



050118

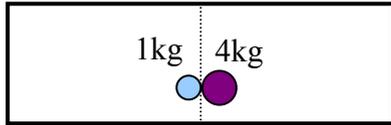


範例 14

原先靜止長度 24 公尺重量為 5 公斤的框架中央有 1 公斤與 4 公斤的物體，今兩物體分別往外彈開後黏於框架之兩端，當兩物黏於框架後，框架的位移為何？

解題思路

→ 超凡入聖，應無所住而生其心！



進階挑戰

1kg 的物體速度=12m/s，4kg 物體爆炸後多久撞到框架？

050119



範例 15

質量分別為 30kg、70kg 的甲、乙兩人，分別自長 10 公尺、質量為 50kg 的台車兩端相向而行，甲走 3 公尺，乙走 5 公尺，不計台車與地面摩擦的影響，則台車對地的位移為何？

